МІНІСТЕРСТВО ОХОРОНИ ЗДОРОВ'Я УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МЕДИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет: Фармацевтичний
Кафедра фізіології та біофізики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з науково-педагогічної роботи

____
Едуард БУРЯЧКІВСЬКИЙ
02 вересня 2024 року

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА ДО ЛЕКЦІЙ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Рівень вищої освіти: другий (магістерський)

Галузь знань: 22 «Охорона здоров'я»

Спеціальність: 226 «Фармація, промислова фармація»

Освітньо-професійна програма: Фармація

Одеса – 2024

Затверджено:

Засіданням кафедри фізіології та біофізики
Одеського національного медичного університету

Протокол № 1 від 26 серпня 2024 року

Завідувач кафедри ______________________ Леонід Годлевський

Розробники:

завідуючий кафедри, д.мед.н., проф. Годлевський Л.С.
доцент кафедри, к.ф.-м.н., Жуматій П.Г.
завуч кафедри, магістр, ст.викл. Марченко С.В.

Лекція № 1

Тема: Диференціальне числення

Мета: Ознайомити здобувачів з основними поняттями диференціального числення, включаючи визначення функції, похідної та диференціала; розглянути геометричний зміст похідної, основні правила диференціювання та їх застосування для аналізу функцій.

Основні поняття: Функція, аргумент, суперпозиція функцій, приріст аргументу, приріст функції, безперервна функція, похідна, диференціювання, кутовий коефіцієнт дотичної, зростаюча функція, убуваюча функція, критичні точки, монотонність, максимум, мінімум, екстремуми, диференціал функції, частинні похідні, повний диференціал, градієнт функції.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Змінна величина Y називається **функцією** незалежної змінної величини X, називаної **аргументом**, якщо кожному значенню змінної X за деяким законом поставлене у відповідність значення змінної Y.

Указуючи, що Y є функцією аргументу X, застосовують один з таких записів: $Y = f(X), Y = F(X), Y = Y(X)$. Якщо замість незалежної змінної X використовуються значення функції $X = g(t)$, то функція $Y = f[g(t)]$ називається **суперпозицією** функцій.

Нехай незалежна змінна набуває значення x_0, а потім x. Різниця між наступним і попереднім значеннями незалежної змінної називають *приростом аргументу*:

$$\Delta x = x - x_0$$

Відповідну різницю між значеннями функції називають *приростом функції*:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

Графічно приріст аргументу й приріст функції зображені на малюнку. Приріст функції залежить і від значення аргументу, і від його приросту.

Функцію $y = f(x)$ називають **безперервною** в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Похідна функції

Похідною функції $Y = f(X)$ у точці X називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Операцію визначення похідної називають **диференціюванням**.

Для позначення похідної використовують символи $y', f'(x), \frac{dy}{dx}$. Похідна показує **миттєву** швидкість зміни функції при зміні аргумента.

Беручи до уваги малюнок, записуємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \beta$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\beta \to \alpha$, $\tan\beta \to \tan\alpha$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\alpha$$

Геометричний зміст похідної: кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в даній точці дорівнює значенню її похідної в точці доторкання.

Правила обчислення похідних

1. $(C)' = 0$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
6. $(uv)' = u'v + uv'$
7. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
8. $(\sin x)' = \cos x$
9. $(\cos x)' = -\sin x$
10. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(a^x)' = a^x \ln a$
15. $(e^x)' = e^x$
16. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Застосування похідної для визначення інтервалів монотонності й екстремумів функції

Функція називається **зростаючою**, якщо додатньому приросту аргументу відповідає додатний приріст функції. Функція називається **убуваючою**, якщо додатньому приросту аргументу відповідає від'ємний приріст функції.

Сформулюємо достатні умови росту й убування функції. Якщо функція $y = f(x)$ має **додатню похідну** в кожній точці проміжку осі x, то функція зростає на цьому проміжку осі x. Якщо функція $y = f(x)$ має **від'ємну похідну** в кожній точці проміжку осі x, то функція убуває на цьому проміжку осі x.

Точки з області визначення функції $f(x)$, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають **критичними точками**. Проміжки між критичними точками, де функція диференційована, представляють області **монотонності** функції.

Функція $y = f(x)$ має **максимум** при $x = x_i$, якщо для околу точки x_i виконується нерівність $f(x_i) > f(x)$. Функція $y = f(x)$ має **мінімум** при $x = x_j$, якщо для околу точки x_j виконується нерівність $f(x_j) < f(x)$. Максимум і мінімум разом представляють **екстремуми** функції.

Сформулюємо **необхідну умову** наявності екстремума функції в критичній точці x_i. Якщо функція $y = f(x)$ має екстремум у точці x_i і в цій точці існує похідна, то ця похідна дорівнює нулю: $f'(x_i) = 0$.

Сформулюємо **достатню умову** наявності екстремума. Якщо функція безперервна в точці x_i, і при переході через цю точку знак похідної змінюється, то в точці x_i функція має екстремум. Якщо знак похідної змінюється з додатного на від'ємний, то має місце максимум. Якщо знак похідної змінюється з від'ємного на додатний — то мінімум.

Диференціал функції

На основі визначення похідної і границі можна записати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де функція $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тепер знаходимо приріст функції у вигляді суми двох доданків:

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

Перший доданок лінійно залежить від приросту аргументу й визначає головну частину приросту функції, якщо $f'(x_0) \neq 0$.

Головна лінійна частина приросту функції $dy = f'(x_0)\Delta x$ називається **диференціалом функції** $f(x)$ у точці x_0. На малюнку зображений геометричний зміст диференціала — як приріст ординати дотичної. Диференціал залежить і від значення аргументу, і від його приросту. Величину Δx називають **диференціалом аргументу** dx. Тому диференціал функції визначають як добуток похідної на диференціал аргументу:

$$dy = f'(x)dx$$

На основі такого визначення похідна функції дорівнює відношенню диференціала функції до диференціала аргументу:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Операція **диференціювання** полягає в тому, щоб знайти похідну або диференціал.

Частинні похідні

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D. Розглянемо такі точки $(x; y)$, які разом з їх околами належать до області визначення функції.

Величина $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ називається **частинним приростом функції по аргументу x** у точці $(x_0; y_0)$. Величину $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ називають **частинним**

приростом функції по аргументу у у точці $(x_0; y_0)$. Розгляд частинного приросту по одному з аргументів автоматично передбачає постійні значення інших аргументів (фіксація інших змінних).

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ **по аргументу х у точці** $(x_0; y_0)$ називають границю відношення частинного приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

Аналогічно визначають частинну похідну по аргументу y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Для частинної похідної використовують ще такі позначення: z'_x, $f'_x(x, y)$.

Частинний приріст функції по аргументу x так, як і при розгляді приросту функції однієї змінної, представляємо у вигляді суми двох доданків:

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

де функція $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Перший доданок лінійно залежить від приросту аргументу й визначає основну частину частинного приросту функції. Вираз $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ називають *частинним диференціалом функції* $z = f(x, y)$ *по аргументу* x у точці $(x_0; y_0)$. Аналогічний вираз $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ називають *частинним диференціалом функції* $z = f(x, y)$ *по аргументу* y у точці $(x_0; y_0)$.

Повний приріст функції двох змінних $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ дорівнює

$$\Delta z = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

Розпишемо повний приріст у такий спосіб:

$$\Delta z = \Delta_x z(x_0, y_0 + \Delta y) + \Delta_y z(x_0, y_0)$$

Отже, *повний приріст є сумою частинних приростів. Повний диференціал* функції декількох змінних визначається як сума частинних диференціалів по кожній змінній. Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ повний диференціал функції буде мати вигляд:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

По формулі для повного приросту функції двох змінних записуємо:

$$\Delta z = dz + \alpha(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Для малих Δx і Δy повний приріст функції прирівнюють до повного диференціала. У результаті одержуємо формулу **лінійної апроксимації функції**

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

у точці $(x_0; y_0)$, яку використовуємо для наближених обчислень. У цій формулі $x = x_0 + \Delta x$ і $y = y_0 + \Delta y$.

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ в точці M є вектор

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$$

Частинні похідні в цій формулі обчислюють у точці M. Напрямок градієнта збігається з напрямком найбільш різкого зростання цієї функції в точці M, а модуль характеризує швидкість цього зростання.

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина І: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Лекція № 2

Тема: Інтегральне числення

Мета: Ввести поняття первісної, невизначеного та визначеного інтегралів; розглянути основні властивості та методи інтегрування (заміна змінної, інтегрування частинами), а також застосування інтегралів для обчислення площ та середніх значень. Ознайомити з різними типами інтегралів.

Основні поняття: Первісна, невизначений інтеграл, знак інтеграла, змінна інтегрування, підінтегральна функція, підінтегральний вираз, стала інтегрування, метод інтегрування частинами, криволінійна трапеція, визначений інтеграл, криволінійний інтеграл, подвійний інтеграл, поверхневий інтеграл, просторовий інтеграл, циркуляція, кратні інтеграли.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Первісна й невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$, якщо $f(x)$ є похідна для $F(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Сукупність первісних $F(x) + C$ для даної функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом**

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

(читається: "невизначений інтеграл еф від ікс де ікс").

Термінологія:

- $\int$ - знак інтеграла
- x - змінна інтегрування
- $f(x)$ - підінтегральна функція
- $f(x)dx$ - підінтегральний вираз
- C - стала інтегрування.

Геометрично невизначений інтеграл являє собою родину кривих, рівняння яких відрізняються постійним доданком C, і одержати їх можна паралельним перенесенням уздовж осі ординат.

Лінійні властивості операції інтегрування можна виразити однією формулою

$$\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x))\,dx = a \int f(x)\,dx + b \int g(x)\,dx,$$

де a і b - довільні постійні множники.

Основні невизначені інтеграли

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

Приклад обчислення інтегралів із заміною змінної інтегрування

Необхідно обчислити інтеграл $\int \cos(3x)\,dx$. Порівнюючи цей інтеграл з тими, що є в таблиці, бачимо, що в таблиці його немає. Однак, є схожий на нього інтеграл $\int \cos x\,dx$. Можна спробувати перетворити даний для обчислення інтеграл у цей табличний за допомогою заміни змінної $t = 3x$.

Ідея такої заміни підказується тим, що в нашому інтегралі є $\cos(3x)$, а в табличному $\cos x$. Після обрання заміни діють завжди однаково - знаходять диференціал dt. У нашому випадку $dt = 3dx$. У загальному випадку з формул для підстановки й диференціала далі виражають dx через t і dt: $dx = \frac{dt}{3}$. Часто завдання значно спрощується, оскільки в інтегралі є добуток, та зручно його виразити через dt. Підставимо в інтеграл $\int \cos(3x)\,dx$ формули $t = 3x$ й $dx = \frac{dt}{3}$. Одержимо:

$$\int \cos(t)\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int \cos(t)\,dt = \frac{1}{3}\sin(t) + C$$

Далі необхідно підставити в цей результат $t = 3x$, тобто повернутися до старої змінної x. Остаточно маємо:

$$\int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$$

Метод інтегрування частинами

На основі формули для похідної добутку двох функцій $(uv)' = u'v + uv'$ можна записати вираз для диференціалу $d(uv) = vdu + udv$. Інтегруючи обидві частини цього виразу, одержимо:

$$\int d(uv) = \int v\,du + \int u\,dv$$

Оскільки інтеграл від диференціалу дорівнює самій функції, маємо:

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

Звідси одержуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Інтегрування із застосуванням цієї формули називають **методом інтегрування частинами**.

Приклад обчислення інтегралів методом інтегрування частинами: Обчислимо $\int x \sin x\,dx$. Нехай $u = x$, $dv = \sin x\,dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$.

$$\int x \sin x\,dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Визначений інтеграл

До необхідності обчислювати визначений інтеграл приводять багато практичних завдань, наприклад, обчислення площі S криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої зверху ділянкою графіка AB функції $f(x)$, а внизу інтервалом $[a, b]$ осі X. Фігуру, обмежену лініями $y = 0; y = f(x); x = a; x = b$, називають **криволінійною трапецією**.

З урахуванням позначень границь інтервалу (нижньої a і верхньої b) і функції $f(x)$, **визначений інтеграл** записують так:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

(читається: "визначений інтеграл від a до b еф від ікс де ікс").

Термінологія:

- $\int$ - знак інтеграла
- x - змінна інтегрування
- $f(x)$ - підінтегральна функція
- $f(x)dx$ - підінтегральний вираз
- a - нижня межа інтегрування
- b - верхня межа інтегрування
- $[a, b]$ - область інтегрування.

Якщо межі інтегрування є постійними величинами, то й відповідний визначений інтеграл — постійне число. Визначений інтеграл залежить від виду підінтегральної функції, від меж інтегрування, але не залежить від позначення змінної інтегрування.

У загальному випадку для обчислення визначених інтегралів застосовують спеціальні методи **чисельного інтегрування**. Однак, якщо для підінтегральної функції $f(x)$ відома первісна функція $F(x)$, то можна скористатися **формулою Ньютона - Лейбніца**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

На основі формули Ньютона-Лейбніца можна дати визначення визначеного інтеграла. **Визначеним інтегралом у межах від a до b від неперервної на проміжку [a, b] функції f(x) є приріст первісної щодо меж інтегрування.**

Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $f(x) = 1$ для $x \in [a, b]$, то $\int_a^b 1 \cdot dx = b - a$.
2. Якщо $a = b$, то $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
3. Постійний множник виноситься за знак визначеного інтеграла: $\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = C \int_a^b f(x)\,dx$.
4. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.
5. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
6. Якщо $f(x) \geq 0$ для $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
7. Адитивна властивість: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, де $a < c < b$.
8. Для визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування виконується така рівність: $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.

Визначений інтеграл застосовують, зокрема, для обчислення середнього значення $\bar{y}$ функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$:

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Типи визначених інтегралів

Поняття визначеного інтеграла може бути узагальнено в різних напрямках. Областю інтегрування простого визначеного інтеграла був проміжок $[a, b]$ числової прямої. Міняючи область інтегрування, можна ввести нові типи визначених інтегралів.

Якщо за область інтегрування брати:

- ділянку якоїсь кривої (на площині або в просторі), то одержимо **криволінійний інтеграл**;
- деяку плоску поверхню, то одержимо **подвійний інтеграл**;
- частину деякої поверхні, то одержимо **поверхневий інтеграл**;

- частина простору, то **просторовий інтеграл**.

Підінтегральна функція може бути **скалярною** або **векторною** величиною, яка у свою чергу збагачує можливості інтегрального числення.

Криволінійні інтеграли

Криволінійні інтеграли першого роду. Нехай AB – деяка крива й $F(M)$ – **скалярна** функція, задана на цій кривій. Тоді криволінійним інтегралом першого роду називають

$$\int_{AB} F(M)\,dl$$

Криволінійні інтеграли другого роду. Нехай AB – деяка крива й $\vec{F}(M)$ – **векторна** функція, задана на цій кривій. Тоді криволінійним інтегралом другого роду називають

$$\int_{AB} \vec{F}(M)\,d\vec{l}$$

У випадку, коли шлях інтегрування C являє собою **замкнену криву**, відповідний криволінійний інтеграл зветься **циркуляцією** й позначається так: $\oint_C \vec{F}\,d\vec{l}$.

Кратні інтеграли

Дотепер ми розглядали визначені інтеграли, у яких область інтегрування являла собою проміжок якоїсь лінії. Такі інтеграли звуться **однократними**. Існує велика кількість завдань, які потребують інтегрування не по проміжку лінії, а по області на якійсь поверхні або в просторі. Розрізняють:

- **подвійні** інтеграли, коли область інтегрування перебуває на площині $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.
- **потрійні** інтеграли, коли область інтегрування перебуває в просторі $\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

Поверхневі інтеграли

Поверхневі інтеграли являють собою узагальнення поняття подвійного інтеграла аналогічне тим, що привели до виникнення криволінійних інтегралів від звичайного визначеного інтеграла. **Поверхневі інтеграли першого роду**. Нехай S – деяка поверхня й $F(M)$ – **скалярна** функція, задана в кожній точці на цій поверхні. Тоді поверхневим інтегралом **першого роду** називають

$$\iint_S F(M)\,dS$$

Поверхневі інтеграли другого роду. Нехай S – деяка поверхня й $\vec{F}(M)$ – **векторна** функція, задана в кожній точці на цій поверхні. Тоді поверхневим інтегралом **другого роду** називають

$$\iint_S \vec{F}(M)\,d\vec{S}$$

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Лекція № 3

Тема: Диференціальні рівняння

Мета: Дати визначення диференціальних рівнянь, їх порядку та типів; розглянути методи розв'язання рівнянь з розділюваними змінними, лінійних рівнянь першого та другого порядку; ознайомити з поняттям систем диференціальних рівнянь та їх застосуванням у фармакокінетичних моделях.

Основні поняття: Диференціальне рівняння, порядок диференціального рівняння, звичайне диференціальне рівняння, загальний розв'язок, частинний розв'язок, диференціальні рівняння у частинних похідних, однорідне та неоднорідне лінійне диференціальне рівняння, характеристичне рівняння, системи диференціальних рівнянь.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

У багатьох практичних задачах необхідно знайти функцію з наперед заданими властивостями. Деякі властивості задаються у вигляді **диференціальних рівнянь**.

Рівняння, яке містить незалежну змінну, шукану функцію та її похідні, називають диференціальним:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Замість похідних невідомої функції у диференціальному рівнянні можуть бути її диференціали.

Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком похідної (або диференціала) у цьому рівнянні.

Якщо у диференціальному рівнянні невідомі функції є функціями однієї змінної, то це **звичайне диференціальне рівняння**.

Загальним розв'язком диференціального рівняння порядку n називається функція $y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, яка при підстановці у диференціальне рівняння обертає його у тотожність; кількість довільних сталих визначається порядком рівняння.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається функція, одержана із загального розв'язку при фіксованих значеннях довільних сталих.

З **геометричної точки зору** загальний розв'язок представляє собою сім'ю кривих, а частинний розв'язок — окрему криву цієї сім'ї.

Диференціальні рівняння, в яких невідомі функції є функціями більше ніж однієї змінної, називаються **диференціальними рівняннями у частинних похідних**.

Диференціальні рівняння з розділюваними змінними

Диференціальне рівняння з розділюваними змінними має вигляд:

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

Для розв'язання цих рівнянь необхідно:

- розділити змінні;
- знайти загальний розв'язок;

- знайти частинний розв'язок, відповідний початковим умовам.

Задача 1. Стік крові до периферії під час діастоли описується у межах моделі кровоносної системи О. Франка, диференціальним рівнянням

$$k\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{X}$$

де k - еластичність стінок судин, p - тиск крові, X - гідравлічний опір периферичної частини кровоносної системи, t - час. Визначити залежність тиску від часу після систоли.

Розв'язання. Розділимо змінні у диференціальному рівнянні:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dt}{kX}$$

Інтегруючи, одержимо:

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{dt}{kX}$$

$$\ln p = -\frac{t}{kX} + C \qquad \Longrightarrow \qquad p = e^C e^{-t/kX}$$

Момент часу $t = 0$ відповідає кінцю систоли, тому відповідний тиск є систолічним у момент завершення систоли - p_0. З урахуванням цієї обставини шуканий розв'язок має вигляд:

$$p(t) = p_0 e^{-t/kX}$$

Ця функція добре описує залежність тиску від часу наприкінці діастоли.

Задача 2. Швидкість зростання популяції бактерій у момент часу t (у годинах) дорівнює розміру популяції x, поділеному на 5. Опишіть цей процес диференціальним рівнянням та знайдіть залежність розміру популяції бактерій від часу.

Розв'язання. Згідно з умовою, запишемо $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{5}$. Розділимо змінні у диференціальному рівнянні:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{5}$$

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln x = \frac{t}{5} + C$$

Потенціюємо: $x = e^C e^{t/5}$. Вихідний розмір популяції x_0 відповідає моменту часу $t = 0$. Тому початкова умова має вигляд $x(0) = x_0$. Визначимо сталу інтегрування e^C, відповідну цій умові: $x_0 = e^C e^0 \implies e^C = x_0$. Знайдемо частинний розв'язок, підставляючи знайдене значення сталої інтегрування у загальний розв'язок:

$$x(t) = x_0 e^{t/5}$$

Цей частинний розв'язок є шуканою відповіддю.

Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння вигляду $y' + p(x)y = 0$ є **однорідним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**. Однорідні рівняння належать до рівнянь з відокремлюваними змінними. Загальний інтеграл рівняння такий: $\ln y = -\int p(x)dx + C$. Загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння має вигляд $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

Рівняння вигляду $y' + p(x)y = q(x)$ називають **неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**. Загальний розв'язок **неоднорідного** лінійного диференціального рівняння шукаємо у вигляді добутку функцій $y = u(x)v(x)$. Підставляємо у рівняння: $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$. Згрупуємо другий та третій доданки: $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$. На функцію $v(x)$ накладаємо таку умову, за якої вираз у дужках дорівнював би нулю: $v' + p(x)v = 0$. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння. Записуємо один із його розв'язків: $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$. Функцію $u(x)$ знаходимо з рівняння: $u'v = q(x) \implies u' = \frac{q(x)}{v(x)} \implies u(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C$. Перемножимо вирази $u(x)$ та $v(x)$ і одержимо загальний розв'язок y.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння вигляду $y'' + py' + qy = f(x)$ називають **лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами**. Якщо $f(x) = 0$, то рівняння **однорідне**: $y'' + py' + qy = 0$. Шукаємо частинні розв'язки **однорідного** рівняння у вигляді $y = e^{kx}$. Одержуємо $k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$. Рівність виконується, якщо $k^2 + pk + q = 0$. Останнє рівняння називають **характеристичним**. Корені цього квадратного рівняння: $k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. Розглянемо три випадки для розв'язків характеристичного рівняння.

Випадок 1. Якщо $p^2 - 4q > 0$, то корені характеристичного рівняння дійсні й різні. Загальний розв'язок диференціального рівняння такий:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

Випадок 2. Якщо $p^2 - 4q = 0$, то корені характеристичного рівняння дійсні й рівні ($k_1 = k_2 = k$). Загальний розв'язок диференціального рівняння такий:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{kx}$$

Випадок 3. Якщо $p^2 - 4q < 0$, то корені характеристичного рівняння уявні. Введемо позначення: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Загальний розв'язок диференціального рівняння у цьому випадку такий:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x))$$

Системи диференціальних рівнянь

При вивченні процесів взаємодії біологічно активних речовин з організмом людини широко використовують різноманітні **фармакокінетичні моделі**, побудовані з використанням диференціальних рівнянь різних типів та порядків. Якщо невідомих функцій більше ніж одна, тоді, відповідно, і диференціальних рівнянь буде більше, тобто у такому випадку мають справу з системою диференціальних рівнянь. На практиці часто зустрічаються **системи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної**:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Нехай є деяке диференціальне рівняння другого порядку $y'' = f(x, y, y')$. Щоб знизити порядок цього рівняння треба розглядати похідну як другу невідому функцію. Позначаючи її через $z = y'$, одержимо еквівалентну систему диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи n диференціальних рівнянь першого порядку залежить від n довільних сталих. Задання n **початкових умов** (при деякому значенні x задаються значення всіх n шуканих функцій) як раз достатньо для визначення всіх сталих і одержання **частинного розв'язку**.

Задача. Розв'язати систему 2 диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y - z \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо систему методом виключення. 1. Продиференціюємо перше рівняння по t: $y'' = y' + z'$. 2. Із другого рівняння системи підставимо вираз для z': $y'' = y' + (y - z)$. 3. Із першого рівняння системи виразимо z: $z = y' - y$. 4. Підставимо вираз для z у рівняння з кроку 2, щоб отримати рівняння другого порядку тільки відносно y:

$$y'' = y' + y - (y' - y)$$

$$y'' = y' + y - y' + y$$

$$y'' - 2y = 0$$

5. Розв'яжемо це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 2 = 0$, звідки корені $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. 6. Загальний розв'язок для $y(t)$:

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

7. Тепер знайдемо $z(t)$, використовуючи вираз $z = y' - y$. Спочатку знайдемо y':

$$y'(t) = C_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - C_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}$$

Підставимо y' та y у вираз для z:

$$z(t) = (C_1\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - C_2\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}) - (C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t})$$

$$z(t) = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t} - C_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t}$$

Таким чином, загальний розв'язок системи знайдено.

Самостійна підготовка

1. Зменшення числа радіоактивних ядер dN за час dt визначається основним законом радіоактивного розпаду (λ - стала розпаду):

$$dN = -\lambda N dt$$

Знайти інтегральну форму закону.

2. При безперервному внутрішньосудинному введенні препарату з постійною швидкістю q змінення його кількості m у крові описується рівнянням (k - стала виведення препарату з крові):

$$\frac{dm}{dt} = q - km$$

Знайти залежність $m(t)$.

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Лічковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Лекція № 4

Тема: Аналіз випадкових величин

Мета: Ввести фундаментальні поняття теорії ймовірностей, такі як випадкова подія, ймовірність, залежні та незалежні події; ознайомити з теоремами складання та множення ймовірностей, поняттям випадкової величини, її видами та способами задання закону розподілу.

Основні поняття: Детерміновані та випадкові події, відносна частота, ймовірність, неможлива подія, вірогідна подія, несумісні та сумісні події, залежні та незалежні події, умовна ймовірність, повна система подій, теорема Байєса, дискретні та неперервні випадкові величини, функція розподілу, щільність розподілу, ряд розподілу, математичне сподівання, медіана, мода, дисперсія, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

При вивченні виходів (результатів) випробувань (експериментів, спостережень, масових обстежень) виявилось, що існують два типи зв'язків між умовами спостереження та його результатами:

- умови спостереження **однозначно** визначають його вихід - такі спостереження називають **детермінованими** та їх результат можна заздалегідь точно передбачати на основі відповідних законів;
- при одних і тих же умовах можуть відбуватись події, що виключають одна одну; такі події називають **випадковими**; проте **масове повторення** спостережень при цих умовах **дає у середньому** результат, який можна передбачити з достатньою точністю за допомогою **статистичних закономірностей**.

Описом статистичних закономірностей, їх вивченням та кількісною оцінкою займається **теорія ймовірностей**.

Випадкову подію масового характеру можна охарактеризувати числом, підрахувавши її **відносну частоту**

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

де m - число реалізацій випадкової події A у серії з n випробувань.

Більш точною характеристикою є **ймовірність** випадкової події $P(A)$, яка визначається граничним переходом

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$

Очевидно, що ймовірність може приймати значення в інтервалі $0 \leq P(A) \leq 1$. Границям цього інтервалу відповідають:

- $P(A) = 0$ - подія A ніколи не відбувається, тому така подія називається **неможливою**,
- $P(A) = 1$ - подія A відбувається завжди, тому така подія називається **вірогідною**.

Розрізняють:

- **несумісні події**, коли реалізація одних випадкових подій виключає настання інших випадкових подій,

- **сумісні події**, коли реалізація одних випадкових подій не виключає настання інших випадкових подій.

Залежні події: подія B називається залежною від A, якщо ймовірність її реалізації залежить від того, сталась подія A або ні. Для залежної події вводиться поняття **умовної ймовірності** $P(/)$, під якою розуміють імовірність реалізації події за умови, що подія сталась.

Незалежні події: події незалежні, якщо $P(/) = P()$, оскільки при цьому ймовірність реалізації події не залежить від появи .

Систему несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають **повною**, якщо при випробуванні обов'язково відбувається одна з цих подій. Сума ймовірностей подій, що складають повну систему, дорівнює 1: $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Теореми складання ймовірностей

- **несумісні події**: $P(A \text{ або } B) = P(A) + P(B)$,

- **сумісні події**: $P(A \text{ або } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ і } B)$.

Теорема множення ймовірностей

- **незалежні події**: $P(A \text{ і } B) = P(A) \cdot P(B)$,

- **залежні події**: $P(A \text{ і } B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Задача 1. В відділенні 4 палати. Імовірність того, що протягом ночі буде потрібна киснева подушка, для 1-ої та 3-ої палат становить 0,2, для 2-ої - 0,3, для 4-ої - 0,1. Визначити ймовірність того, що протягом ночі буде потрібна киснева подушка одночасно в 1-у та 4-у палати.

Розв'язок. Потреби у кисневій подушці для хворих у різних палатах не залежать одна від одної, тому слід у даному випадку скористатись теоремою множення ймовірностей для незалежних подій: $P(A_1 \text{ і } A_4) = P(A_1) \cdot P(A_4) = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$. Шукана ймовірність дорівнює 0,02.

Задача 2. Нехай імовірність вилікування деякого захворювання при своєчасному звертанні до лікаря дорівнює 0,7, а ймовірність своєчасного звертання до лікаря дорівнює 0,5. Яка ймовірність успішного виходу лікування за цих умов?

Розв'язок. Успіх лікування залежить від своєчасного звертання до лікаря, тобто події залежні, а відтак треба застосовувати теорему множення ймовірностей залежних подій. Нехай A - своєчасне звернення, B - успішне лікування. $P(A \text{ і } B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$.

Теорема про повну ймовірність: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$, де H_i - події, що створюють повну систему.

Теорема Байєса: $P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$.

Випадкові величини

Для кількісного опису результатів випробувань застосовують **випадкові величини**, які приймають значення, що змінюються від випробування до випробування. Розрізняють:

- **дискретні** випадкові величини, які набувають лише окремих, ізольованих значень (число викликів лікаря),
- **неперервні** випадкові величини, що набувають будь-які значення усередині деякого інтервалу (температура тіла хворого).

Випадкова величина вважається заданою, якщо відомо її **розподіл** (закон). Табличне зображення розподілу (**ряд розподілу**) може бути використано тільки для дискретної випадкової величини:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Умова нормування: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Функція розподілу $F(x) = P(X < x)$ визначає ймовірність того, що випадкова величина набуде будь-яке з своїх значень, що не перевищують деякого числа .

До числових характеристик випадкової величини належать:

- **математичне сподівання**: $M(X) = \sum x_i p_i$,
- **медіана** Me: значення, для якого $F(Me) = 0.5$,
- **мода** Mo: значення з найбільшою ймовірністю.
- **дисперсія**: $D(X) = M[(X - M(X))^2] = \sum (x_i - M(X))^2 p_i$,
- **стандартне відхилення**: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$,
- **коефіцієнт варіації**: $C.V. = \frac{\sigma(X)}{M(X)}$.

Неперервну випадкову величину задають **функцією щільності розподілу** ймовірностей $f(x)$, що дорівнює першій похідній від функції розподілу: $f(x) = F'(x)$. Умова нормування: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. Математичне сподівання та дисперсію неперервної випадкової величини обчислюють за формулами:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)\,dx$$

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Лекція № 5

Тема: Закони розподілу випадкових величин

Мета: Сформувати у здобувачів цілісне уявлення про найуживаніші закони розподілу дискретних та неперервних випадкових величин, які безпосередньо з'являються в медико-біологічних задачах: підрахунок подій, частоти появ, інтервали між подіями, розподіл вимірюваних фізіологічних показників, узагальнення великої кількості незалежних малих впливів. Розглянути поліноміальний, біноміальний, негативний біноміальний, геометричний та пуассонівський розподіли як базові моделі дискретних підрахунків; нормальний, рівномірний та експонентний розподіли як базові моделі неперервних величин. Пояснити параметри кожного розподілу, його математичне сподівання та дисперсію, а також типові умови застосовності та наближення (Муавра—Лапласа, нормальне наближення Пуассона).

Основні поняття: випадкова величина; дискретна та неперервна випадкова величина; функція розподілу $F(x)$; імовірнісна масова функція $P(X = x)$; густина ймовірності $f(x)$; параметри розподілу; математичне сподівання; дисперсія; поліноміальний розподіл; біноміальний розподіл (формула Бернуллі); негативний біноміальний розподіл; геометричний розподіл; розподіл Пуассона; нормальний розподіл; формула Муавра—Лапласа; нормована (стандартизована) випадкова величина; стандартний нормальний розподіл; рівномірний розподіл; експонентний розподіл.

1. Загальні означення: закон розподілу та його форми

1.1. Випадкова величина і закон розподілу

Випадкова величина X — числова характеристика результату випадкового експерименту.

Закон розподілу задає, з якими ймовірностями (або з якою густиною) X набуває значень.

1.2. Дискретний та неперервний випадки

1) Дискретна випадкова величина. Якщо X набуває скінченної або зліченної множини значень x_k, то закон розподілу задається ймовірностями:

$$P(X = x_k) = p_k, \qquad p_k \geq 0, \qquad \sum_k p_k = 1.$$

2) Неперервна випадкова величина. Якщо X має густину $f(x)$, то:

$$f(x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$$

а ймовірність інтервалу:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

1.3. Функція розподілу

Для будь-якої випадкової величини (дискретної чи неперервної) визначається **функція розподілу**:

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Вона неспадна, має границі $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$, і в неперервному випадку пов'язана з густиною формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

2. Дискретні розподіли (підрахунок подій)

2.1. Поліноміальний (мультиноміальний) розподіл

Нехай у кожному з n незалежних випробувань може реалізуватися одна з i взаємовиключних подій $E_1, \ldots, E_i$ з імовірностями

$$p_1, \ldots, p_i, \qquad p_k \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{i} p_k = 1.$$

Нехай n_k — кількість реалізацій події E_k у n випробуваннях, причому

$$n_1 + \cdots + n_i = n.$$

Тоді:

$$P(n_1, \ldots, n_i) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_i!}\, p_1^{n_1} \cdots p_i^{n_i}.$$

Для кожного k:

$$M(n_k) = np_k, \qquad D(n_k) = np_k(1 - p_k).$$

Приклад 1. (групи крові)
Є 4 категорії $0, A, B, AB$ з частками $0.45, 0.40, 0.10, 0.05$. Випадково обрано $n = 6$ осіб. Ймовірність того, що 3 мають групу 0, 3 мають групу A, а B та AB не трапляються:

$$P(3, 3, 0, 0) = \frac{6!}{3!3!0!0!}(0.45)^3(0.40)^3.$$

Обчислення:

$$\frac{6!}{3!3!} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20, \qquad (0.45)^3 = 0.091125, \qquad (0.40)^3 = 0.064.$$

Тоді:

$$P(3, 3, 0, 0) = 20 \cdot 0.091125 \cdot 0.064 \approx 0.1166.$$

2.2. Біноміальний розподіл (формула Бернуллі)

Нехай проводиться n незалежних випробувань Бернуллі з ймовірністю «успіху» p (і $q = 1-p$). Нехай X — число успіхів. Тоді:

$$P(X = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Основні характеристики:

$$M(X) = np, \qquad D(X) = npq.$$

Приклад 2. Ймовірність появи колонії $p = 0.7$, $n = 6$, спостерігали $m = 4$. Тоді:

$$P_6(4) = \frac{6!}{4!2!}(0.7)^4(0.3)^2.$$

Обчислення:

$$\frac{6!}{4!2!} = 15, \qquad (0.7)^4 = 0.2401, \qquad (0.3)^2 = 0.09,$$
$$P_6(4) = 15 \cdot 0.2401 \cdot 0.09 \approx 0.324.$$

2.3. Негативний біноміальний розподіл

Негативний біноміальний розподіл описує число випробувань n, потрібне для отримання m успіхів. Ймовірність того, що m-й успіх з'явиться саме в n-му випробуванні:

$$P(n) = C_{n-1}^{m-1} p^m q^{n-m}, \qquad n = m, m+1, \ldots$$

Математичне сподівання та дисперсія:

$$M(X) = \frac{m}{p}, \qquad D(X) = \frac{m(1-p)}{p^2}.$$

Приклад 3. Захворювання має частоту $p = 0.1$. Ймовірність того, що третій випадок буде виявлений при огляді п'ятого:

$$P(5) = C_4^2(0.1)^3(0.9)^2.$$

Обчислення:

$$C_4^2 = 6, \qquad (0.1)^3 = 0.001, \qquad (0.9)^2 = 0.81,$$
$$P(5) = 6 \cdot 0.001 \cdot 0.81 = 0.00486.$$

2.4. Геометричний розподіл

Геометричний розподіл є окремим випадком негативного біноміального при $m = 1$. Він описує ймовірність того, що перший успіх настане в n-му випробуванні:

$$P(n) = pq^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Математичне сподівання та дисперсія:

$$M(X) = \frac{1}{p}, \qquad D(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Приклад 4. Імовірність успіху пересадки $p = 0.4$. Ймовірність успіху з третьої спроби:

$$P(3) = 0.4 \cdot (0.6)^2 = 0.144.$$

2.5. Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона описує число рідких подій за фіксований проміжок часу/простору. Його часто розглядають як границю біноміального розподілу при $N \to \infty$, $p \to 0$, але з фіксованим

$$\lambda = Np.$$

Формула:

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Властивість:

$$M(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda.$$

Приклад 5. Кількість звернень до травматолога за тиждень має $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda = 5)$. Знайти:

$$P(X \le 3) = \sum_{n=0}^{3} \frac{5^n e^{-5}}{n!} = e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!} + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!}\right).$$

Чисельно:

$$e^{-5} \approx 0.006738, \qquad 1 + 5 + 12.5 + 20.8333 \approx 39.3333,$$
$$P(X \le 3) \approx 0.006738 \cdot 39.3333 \approx 0.265.$$

3. Неперервні розподіли (вимірювані величини та час очікування)

3.1. Нормальний розподіл

Нормальний розподіл є базовою моделлю для багатьох біологічних і медичних показників, а також універсальною границею для сум незалежних впливів.

Густина:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Позначення:

$$X \sim N(\mu, \sigma).$$

Параметри:

$$M(X) = \mu, \qquad D(X) = \sigma^2.$$

Стандартизація. Якщо $X \sim N(\mu, \sigma)$, то

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

де $N(0, 1)$ — **стандартний нормальний розподіл**.

Нормальне наближення біноміального (Муавра—Лапласа). Для $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ з

$$M(X) = np, \qquad D(X) = npq,$$

при достатньо великому n (коли npq не мале) використовують наближення нормальним розподілом з $\mu = np$, $\sigma^2 = npq$.

Нормальне наближення Пуассона. Для $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ при λ достатньо великому часто використовують

$$X \approx N(\lambda, \sqrt{\lambda}).$$

3.2. Рівномірний розподіл

Рівномірний розподіл використовується як модель «повної відсутності переваги» в інтервалі $[a, b]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & x < a \text{ або } x > b. \end{cases}$$

Параметри:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3.3. Експонентний розподіл

Експонентний розподіл є природною моделлю часу очікування до настання події у пуассонівському потоці (наприклад, час між зверненнями, надходженнями сигналів, реєстраціями рідких подій). Густина:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad 0 < x < \infty.$$

Параметри:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \big(M(X)\big)^2.$$

4. Порівняльна таблиця (короткий огляд моделей)

Розподіл	**Тип**	**Параметри**	**Типова інтерпретація**
Поліноміальний	дискретний	$n,\ p_1, \dots, p_i$	числа подій різних типів
Біноміальний	дискретний	$n,\ p$	число успіхів у n випробуваннях
Негативний біноміальний	дискретний	$m,\ p$	число спроб до m успіхів
Геометричний	дискретний	p	номер спроби першого успіху
Пуассон	дискретний	λ	число рідких подій за інтервал
Нормальний	неперервний	μ, σ	сума незалежних впливів, вимірювання
Рівномірний	неперервний	a, b	рівноймовірні значення в інтервалі
Експонентний	неперервний	λ	час очікування між подіями

5. Підсумок

Розподіли є математичними моделями випадковості. Дискретні розподіли природні для підрахунку кількості подій, неперервні — для вимірюваних величин та часових інтервалів. Поліноміальний і біноміальний описують «рахунок категорій» та «рахунок успіхів», негативний біноміальний і геометричний — «час до успіхів», Пуассон — «рідкі події», нормальний — «універсальна межа для сум», експонентний — «час очікування в пуассонівському потоці».

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Лекція № 6

Тема: Закони розподілу статистик вибірки. Граничні закони теорії ймовірностей

Мета: Системно викласти ключові граничні твердження теорії ймовірностей, які забезпечують перехід від «випадковості окремих спостережень» до стійких закономірностей для великих вибірок. Розглянути нерівність Чебишова як універсальний інструмент оцінювання ймовірностей відхилення без знання закону розподілу, сформулювати закон великих чисел (у формі теореми Чебишова та закону Бернуллі) як принцип збіжності середніх/частот, а також центральну граничну теорему як основу нормального наближення. Далі ввести фундаментальні розподіли статистик вибірки: χ^2-розподіл, t-розподіл Стьюдента та F-розподіл Фішера—Снедекора, пояснити їхні означення, параметри (ступені вільності), основні властивості та роль у побудові довірчих інтервалів і статистичних критеріїв.

Основні поняття: нерівність Чебишова; закон великих чисел; теорема Чебишова; випробування Бернуллі; закон Бернуллі; центральна гранична теорема; стандартизація; нормування; статистика вибірки; χ^2-розподіл; ступені вільності; t-розподіл; F-розподіл; адитивність χ^2; граничні наближення при великих ступенях вільності.

1. Вступ: чому граничні закони є фундаментом статистики

Статистика працює з вибіркою $X_1, \ldots, X_n$, яка є реалізацією випадкових величин. У прикладних задачах закон розподілу часто невідомий, але потрібні:

- оцінювання параметрів (середнього, дисперсії тощо),
- побудова інтервалів довіри,
- перевірка гіпотез.

Граничні закони дають відповідь на питання: що стається з вибірковими характеристиками, коли n зростає, і чому «середнє стабілізується», а «сума стає майже нормальною». Саме це дозволяє будувати універсальні статистичні процедури.

2. Нерівність Чебишова як універсальна оцінка відхилень

2.1. Формулювання нерівності

Нехай випадкова величина X має математичне сподівання $\mu = M(X)$ і дисперсію $\sigma^2 = D(X)$ (тобто $\sigma = \sqrt{D(X)}$). Закон розподілу X може бути невідомий. Тоді для будь-якого $\Delta x > 0$ виконується **нерівність Чебишова**:

$$P\big(|X - \mu| \geq \Delta x\big) \leq \frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2}.$$

2.2. Нормований запис

Зручно покласти $\Delta x = z\sigma$ (де $z > 0$). Тоді:

$$P\big(|X - \mu| \geq z\sigma\big) \leq \frac{1}{z^2}.$$

Якщо ввести нормовану величину

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma},$$

то нерівність набуває вигляду:

$$P(|Z| \geq z) \leq \frac{1}{z^2}.$$

2.3. Зміст і межі застосування

Нерівність Чебишова:

- не вимагає знання закону розподілу X;
- використовує лише μ та σ^2;
- дає грубу, але гарантовану оцінку «ймовірності великих відхилень».

Вона особливо цінна як теоретична основа для закону великих чисел.

3. Закон великих чисел: теорема Чебишова

3.1. Усереднення як операція зменшення мінливості

Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — попарно незалежні випадкові величини з однаковими параметрами:

$$M(X_i) = \mu, \qquad D(X_i) = \sigma^2.$$

Введемо вибіркове середнє:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Тоді:

$$M(\bar{X}) = \mu, \qquad D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Ключовий факт: **дисперсія усередненого значення в n разів менша**, ніж дисперсія одного спостереження.

3.2. Теорема Чебишова (форма закону великих чисел)

Застосуємо нерівність Чебишова до $\bar{X}$:

$$P\big(|\bar{X}-\mu| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Звідси безпосередньо випливає твердження (закон великих чисел у формі Чебишова):

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|\bar{X}-\mu| \geq \varepsilon\big) = 0 \quad \text{для кожного } \varepsilon > 0.$$

Тобто $\bar{X}$ **збіжне за ймовірністю** до μ:

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu.$$

Це і є строгий математичний сенс вислову «середнє стабілізується при збільшенні обсягу вибірки».

4. Закон великих чисел: закон Бернуллі

4.1. Модель Бернуллі

Розглянемо випробування Бернуллі: подія «успіх» трапляється з імовірністю p, «неуспіх» — з імовірністю $q = 1 - p$. Нехай $X_i \in \{0, 1\}$ — індикатор успіху в i-му випробуванні:

$$P(X_i = 1) = p, \qquad P(X_i = 0) = q.$$

Тоді:

$$M(X_i) = p, \qquad D(X_i) = pq.$$

4.2. Відносна частота і закон Бернуллі

Нехай $X_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ — число успіхів у N випробуваннях. Відносна частота:

$$\frac{X_N}{N}.$$

Застосовуємо оцінку Чебишова до $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum X_i = \frac{X_N}{N}$:

$$P\left(\left| \frac{X_N}{N} - p \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{pq}{N\varepsilon^2}.$$

Це і є **закон Бернуллі**: при $N \to \infty$ відносна частота події збігається до її ймовірності:

$$\frac{X_N}{N} \xrightarrow{P} p.$$

5. Центральна гранична теорема (ЦГТ)

5.1. Ідея: суми стають «майже нормальними»

Нехай $X_1, \ldots, X_n$ — незалежні випадкові величини з

$$M(X_i) = \mu_i, \qquad D(X_i) = \sigma_i^2.$$

Розглянемо суму:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Тоді:

$$M(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i, \qquad D(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

5.2. Стандартизація суми

Введемо стандартизовану суму:

$$Z_n = \frac{Y_n - M(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}}.$$

Центральна гранична теорема стверджує (у найпоширенішій інтерпретації базового курсу), що при достатньо великому n розподіл Z_n є близьким до стандартного нормального:

$$Z_n \approx N(0,1),$$

а в граничному сенсі Z_n прямує за розподілом до $N(0,1)$.

5.3. Практичний наслідок

ЦГТ пояснює, чому:

- середні $\bar{X}$ часто мають приблизно нормальний розподіл навіть якщо X_i не нормальні;
- нормальні наближення дають основу для довірчих інтервалів і критеріїв у великій вибірці.

6. Закони розподілу статистик вибірки: χ^2, t, F

6.1. χ^2-розподіл

Нехай $Z_1, \dots, Z_\nu$ — незалежні величини зі стандартним нормальним розподілом $N(0,1)$. Тоді

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$$

має χ^2**-розподіл** із **числом ступенів вільності** ν, тобто:

$$Y \sim \chi^2(\nu).$$

Основні характеристики:

$$M(Y) = \nu, \qquad D(Y) = 2\nu.$$

Нормальне наближення при великих ν:

$$Z = \frac{Y - \nu}{\sqrt{2\nu}} \approx N(0,1) \quad \text{для великих } \nu.$$

Властивість **адитивності**: якщо $Y_1 \sim \chi^2(\nu_1)$ і $Y_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ незалежні, то

$$Y_1 + Y_2 \sim \chi^2(\nu_1 + \nu_2).$$

6.2. t-розподіл (розподіл Стьюдента)

Нехай

$$Z \sim N(0,1), \qquad Y \sim \chi^2(\nu),$$

і Z та Y незалежні. Тоді випадкова величина

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$$

має t**-розподіл Стьюдента** з ν ступенями вільності:

$$T \sim t(\nu).$$

Основні характеристики:

$$M(T) = 0 \text{ (при } \nu > 1), \qquad D(T) = \frac{\nu}{\nu - 2} \text{ (при } \nu > 2).$$

Гранична властивість:

$$t(\nu) \implies N(0,1) \quad \text{при } \nu \to \infty.$$

Роль у статистиці: t-розподіл виникає при оцінюванні середнього μ нормальної сукупності за малої вибірки, коли σ невідома і замінюється на s.

6.3. F-розподіл (розподіл Фішера—Снедекора)

Нехай

$$Y_1 \sim \chi^2(\nu_1), \qquad Y_2 \sim \chi^2(\nu_2),$$

незалежні. Тоді

$$F = \frac{Y_1/\nu_1}{Y_2/\nu_2}$$

має F**-розподіл Фішера—Снедекора** зі ступенями вільності ν_1, ν_2:

$$F \sim F(\nu_1, \nu_2).$$

Математичне сподівання (за умови $\nu_2 > 2$):

$$M(F) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}.$$

Дисперсія (за умови $\nu_2 > 4$):

$$D(F) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}.$$

Роль у статистиці: порівняння дисперсій, дисперсійний аналіз (ANOVA), перевірка значущості регресії.

7. Ступені вільності: сенс та походження (коротко)

Число ступенів вільності відображає, скільки незалежних «компонент варіації» залишається після накладання обмежень. Класичний приклад: у вибірці $x_1, \ldots, x_n$ після фіксації $\bar{x}$ сума відхилень $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$ задає одне лінійне обмеження, тому для дисперсії використовується $\nu = n - 1$.

8. Підсумок

Нерівність Чебишова дає універсальні оцінки без знання закону розподілу. Теорема Чебишова та закон Бернуллі формалізують «стабілізацію» середніх і частот при зростанні обсягу вибірки. Центральна гранична теорема пояснює, чому нормальний розподіл з'являється як універсальна межа для сум і середніх. Розподіли χ^2, t та F є базовими розподілами статистик вибірки, на яких побудовано більшість класичних методів інтервального оцінювання та перевірки гіпотез.

Контрольні запитання (для самоперевірки):

1. У чому сила та обмеження нерівності Чебишова?
2. Як зменшується дисперсія $\bar{X}$ при зростанні n і чому це принципово?
3. Як закон Бернуллі випливає з оцінки Чебишова?
4. Чому для сум і середніх виникає нормальне наближення?
5. Як означається $\chi^2(\nu)$ і що означає ν?
6. За яких умов $t(\nu)$ прямує до $N(0,1)$?
7. Як $F(\nu_1, \nu_2)$ пов'язаний з відношенням двох χ^2-величин?
8. Наведіть приклади задач, де застосовують χ^2, t та F-розподіли.

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Лекція № 7

Тема: Аналіз варіаційних рядів

Мета: Сформувати у здобувачів системне розуміння первинної статистичної обробки даних: від побудови варіаційного ряду та таблиць частот до графічної візуалізації (гістограма, полігон частот, огива) й переходу від описових характеристик вибірки до точкового та інтервального оцінювання параметрів генеральної сукупності. Навчити акуратно працювати з різними типами даних (дискретні/неперервні), коректно обирати інтервали групування та інтерпретувати емпіричні оцінки як наближення параметрів генерального розподілу.

Основні поняття: варіаційний ряд (дискретний та інтервальний); клас (інтервал); абсолютна частота; відносна частота; накопичена частота; гістограма; полігон частот; огива (кумулятивна крива); емпірична функція розподілу; генеральна сукупність; вибірка; репрезентативність; статистичні оцінки; параметричне та непараметричне оцінювання; розмах; інтерквартильний розмах; середнє; дисперсія; стандартне відхилення; коефіцієнт варіації; мода; медіана; квартилі та процентилі; надійний інтервал; надійна ймовірність.

1. Генеральна сукупність, вибірка та репрезентативність

Генеральна сукупність — множина всіх потенційно можливих значень досліджуваної ознаки в заданих умовах. Формально, це розподіл випадкової величини X із певними (можливо невідомими) параметрами.

Вибірка — підмножина з n спостережень $x_1, \dots, x_n$, отриманих у результаті вимірювань/-спостережень.

Репрезентативна вибірка — така вибірка, яка відтворює істотні риси генеральної сукупності (розподіл, мінливість, типові значення) без систематичних перекосів. Репрезентативність визначається не «красивими числами», а процедурою відбору (випадковість, відсутність систематичних зміщень, достатній обсяг, коректні критерії включення/виключення).

2. Варіаційний ряд як базова форма організації даних

2.1. Невпорядкована та впорядкована вибірка

Початкова вибірка зазвичай подана як набір значень $x_1, \dots, x_n$. Для аналізу її впорядковують:

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)},$$

де $x_{(i)}$ — i-та порядкова статистика.

2.2. Дискретний варіаційний ряд

Якщо ознака дискретна (або якщо дані округлені до небагатьох значень), формують таблицю:

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^* \quad (x_k^* \text{ — різні значення}),$$

та частоти:

$$n_k = \#\{i : \ x_i = x_k^*\}, \qquad p_k = \frac{n_k}{n}, \qquad \sum_{k=1}^{m} n_k = n, \quad \sum_{k=1}^{m} p_k = 1.$$

2.3. Інтервальний варіаційний ряд

Якщо ознака неперервна (або значень багато), дані групують у класи (інтервали). Нехай вибрано k інтервалів:

$$[a_0, a_1),\ [a_1, a_2),\ \ldots,\ [a_{k-1}, a_k],$$

де $a_0 = x_{\min}$, $a_k = x_{\max}$ (або з невеликим розширенням меж), а $h_m = a_m - a_{m-1}$ — ширина m-го інтервалу.

3. Групування даних: число класів, ширина класу, щільність

3.1. Розмах

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

3.2. Вибір числа класів та ширини

Практична евристика, яку часто використовують у базовому курсі:

$$k \approx \sqrt{n}, \qquad h \approx \frac{R}{k}.$$

Це *не* закон природи, а компроміс між надто грубим і надто дрібним групуванням.

3.3. Абсолютні та відносні частоти

Нехай n_m — абсолютна частота в m-му класі, $p_m = n_m/n$ — відносна частота. Важливо:

$$\sum_{m=1}^{k} n_m = n, \qquad \sum_{m=1}^{k} p_m = 1.$$

3.4. Щільність відносних частот

Якщо інтервали мають ширини h_m, то коректною «висотою» стовпчика гістограми в сенсі площі є

$$f_m = \frac{p_m}{h_m}.$$

Тоді площа прямокутника на інтервалі дорівнює p_m, а сумарна площа дорівнює 1.

4. Гістограма, полігон частот та огива

4.1. Гістограма

Гістограма — це графічне подання інтервального варіаційного ряду: на кожному інтервалі будують прямокутник ширини h_m з висотою, що дорівнює n_m, p_m або (найкоректніше для нерівних інтервалів) f_m.

4.2. Полігон частот

Для полігону беруть середини інтервалів:

$$c_m = \frac{a_{m-1} + a_m}{2},$$

та будують точки (c_m, n_m) або (c_m, p_m), після чого з'єднують їх відрізками.

4.3. Емпірична функція розподілу та огива

Для не згрупованих даних емпірична функція розподілу:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\{x_i \le x\}.$$

Вона є неспадною, правобічно неперервною та має стрибки величини $1/n$.

Для згрупованих даних будують **кумулятивні частоти**:

$$P_m = \sum_{j=1}^{m} p_j,$$

а **огива** — це графік накопичених відносних частот як функції правих меж інтервалів (або значень x_i^* у дискретному випадку).

5. Алгоритм побудови інтервального варіаційного ряду та гістограми (узагальнено)

1. Задати n та визначити $x_{\min}, x_{\max}$.
2. Обчислити розмах $R = x_{\max} - x_{\min}$.
3. Обрати число класів k (наприклад, $k \approx \sqrt{n}$).
4. Обрати межі класів $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ та ширини $h_m = a_m - a_{m-1}$.
5. Підрахувати n_m у кожному класі та $p_m = n_m/n$.
6. Якщо ширини класів різні, обчислити щільності $f_m = p_m/h_m$.
7. Побудувати гістограму (за f_m або p_m), полігон (за серединами класів) і огиву (за накопиченими частотами).

6. Приклад (дискретний варіаційний ряд): полігон відносних частот та огива

Приклад. Згруповані дані про кількість квіток лікарської рослини на одному пагоні (20 пагонів) утворюють дискретний варіаційний ряд:

кількість квіток	1	2	3	4	5	6	7	8
частота	0	1	3	6	4	3	2	1

Розв'язок. Загальна кількість спостережень:

$$n = 20.$$

Відносні частоти:

$$p_i = \frac{n_i}{20}.$$

Накопичені відносні частоти:

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} p_j.$$

Отримаємо таблицю:

кількість квіток (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
частота (n_i)	0	1	3	6	4	3	2	1
відн. частота (p_i)	0.00	0.05	0.15	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05
накоп. част. (F_i)	0.00	0.05	0.20	0.50	0.70	0.85	0.95	1.00

Полігон відносних частот будують за точками (x_i, p_i), огиву — за точками (x_i, F_i) (або за правими межами класів у разі інтервального ряду).

7. Описові характеристики вибірки (точкові оцінки)

Величини, що обчислюються безпосередньо за вибіркою, називають **вибірковими статистиками**. Вони є точковими оцінками відповідних параметрів генеральної сукупності.

7.1. Положення (центр)

- **Мода** — значення, що має найбільшу частоту у варіаційному ряді.
- **Медіана** — центральне значення впорядкованої вибірки:

$$\mathrm{Me} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & n \text{ непарне}, \\ \frac{1}{2}\big(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}\big), & n \text{ парне}. \end{cases}$$

- **Вибіркове середнє**:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

7.2. Розсіювання (мінливість)

- **Вибіркова дисперсія**:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

- **Вибіркове стандартне відхилення**:

$$s = \sqrt{s^2}.$$

- **Коефіцієнт варіації**:
$$C.V. = \frac{s}{\bar{x}}.$$
- **Розмах**:
$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

7.3. Квантілі (квартилі, процентилі)

Процентиль p (у відсотках) — значення, нижче якого лежить приблизно $p\%$ спостережень. Зокрема:
$$Q_1\ (25\%)\ , \qquad Q_2 = \mathrm{Me}\ (50\%)\ , \qquad Q_3\ (75\%).$$
Інтерквартильний розмах:
$$IQR = Q_3 - Q_1.$$

8. Оцінювання параметрів генеральної сукупності: точкове та інтервальне

8.1. Точкове оцінювання

Точкова оцінка — число, яке вважається наближенням істинного параметра генеральної сукупності. Наприклад, $\bar{x}$ є оцінкою μ, а s^2 — оцінкою σ^2.

8.2. Інтервальне оцінювання та надійний інтервал

Інтервальна оцінка — інтервал випадкового вигляду, який з наперед заданою ймовірністю накриває істинне значення параметра.

Надійний інтервал для параметра θ з надійною ймовірністю γ має властивість:
$$P\big(\theta \in (L(X), U(X))\big) = \gamma.$$
Тут $L(X), U(X)$ залежать від вибірки, а θ — фіксований (але невідомий) параметр.

9. Інтервальні оцінки для нормального розподілу

Нехай $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, а вибірка $X_1, \ldots, X_n$ незалежна.

9.1. Надійний інтервал для математичного сподівання μ (дисперсія невідома)

1. Обчислити $\bar{x}$ та s.
2. З таблиці Стьюдента знайти $t_{1-\alpha/2,\ \nu}$ для $\nu = n - 1$.
3. Надійний інтервал рівня $\gamma = 1 - \alpha$:
$$\bar{x} - t_{1-\alpha/2,\ \nu}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\alpha/2,\ \nu}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

9.2. Надійний інтервал для дисперсії σ^2

1. Обчислити s^2.
2. З таблиці χ^2-розподілу знайти $\chi^2_{\alpha/2,\ \nu}$ та $\chi^2_{1-\alpha/2,\ \nu}$, де $\nu = n - 1$.
3. Надійний інтервал рівня $\gamma = 1 - \alpha$:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\ \nu}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,\ \nu}}.$$

10. Підсумок

Аналіз варіаційних рядів є фундаментом прикладної статистики: він забезпечує коректну організацію даних, наочну візуалізацію емпіричного розподілу та вводить базові оцінки положення й мінливості. Через інтервальні оцінки він дає перший місток від «опису вибірки» до висновків про генеральну сукупність.

Контрольні запитання (для самоперевірки):

1. Чим відрізняються дискретний і інтервальний варіаційні ряди та коли який слід використовувати?
2. Чому для нерівних інтервалів у гістограмі треба використовувати щільність $f_m = p_m/h_m$?
3. Як визначається емпірична функція розподілу $F_n(x)$ і чим вона відрізняється від теоретичної $F(x)$?
4. Який зміст мають мода, медіана та середнє, і чому вони можуть давати різні «центри»?
5. Чому у формулі дисперсії використовується $n - 1$, а не n?
6. Як змінюється ширина довірчого інтервалу для μ при збільшенні n?
7. Як інтерпретувати надійну ймовірність γ у термінах процедури побудови інтервалу?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Лекція № 8

Мета: Сформувати цілісне уявлення про перевірку статистичних гіпотез як про формалізовану процедуру прийняття рішень в умовах невизначеності. Розглянути: (i) формулювання нульової та альтернативної гіпотез, (ii) побудову критерію та критичної області, (iii) помилки першого та другого роду, рівень значущості, надійність та потужність, (iv) двобічні й однобічні перевірки, (v) p-значення як альтернативу табличним критичним точкам, (vi) типові параметричні критерії для нормальних сукупностей, (vii) практичні задачі: виявлення промахів (критерії Діксона), перевірка систематичної похибки, порівняння відтворюваності та порівняння центрів розподілу двох незалежних сукупностей.

Основні поняття: статистична гіпотеза; параметрична та непараметрична гіпотеза; нуль-гіпотеза H_0; альтернативна гіпотеза H_1; критерій перевірки K; область допустимих значень O; критична область W; двобічна та однобічна критична область; помилка I роду α; помилка II роду β; надійність $1-\alpha$; потужність $1-\beta$; критичне значення; p-значення; тестові статистики Z, t, χ^2, F; систематична похибка; відтворюваність; промахи (викиди); критерії Діксона.

1. Статистична гіпотеза як формалізоване твердження

Статистична гіпотеза — це твердження про розподіл генеральної сукупності або про її параметри (наприклад, про μ, σ^2, про рівність середніх/дисперсій у двох сукупностях тощо).

Завжди формулюють дві взаємодоповнювальні гіпотези:

$$H_0 \text{ (нульова гіпотеза)}, \qquad H_1 \text{ (альтернативна гіпотеза)}.$$

Перевіряють *саме* H_0. Альтернатива визначає тип критичної області: двобічної чи однобічної.

2. Загальна схема перевірки гіпотез

Нехай за вибіркою $x_1, \dots, x_n$ будуємо **критерій перевірки** $K = K(x_1, \dots, x_n)$. Далі задаємо:

- **область допустимих значень** O (значення критерію, сумісні з H_0);
- **критичну область** W (значення критерію, несумісні з H_0).

Правило:

$$K \in W \implies H_0 \text{ відхиляють}, \qquad K \in O \implies H_0 \text{ не відхиляють}.$$

(Вираз «приймають H_0» у строгій статистичній мові небезпечний, бо H_0 не «доводять», а лише *не знаходять підстав* її відхилити.)

3. Помилки I та II роду, рівень значущості та потужність

Існують два типи помилок:

- **Помилка I роду**: відхилення H_0, коли H_0 істинна.
- **Помилка II роду**: не відхилення H_0, коли H_1 істинна.

Позначення:

$$\alpha = P(K \in W \mid H_0) \quad \text{(рівень значущості)},$$

$$\beta = P(K \in O \mid H_1) \quad \text{(імовірність помилки II роду)}.$$

Тоді:

$$1-\alpha \quad \text{— надійність критерію,} \qquad 1-\beta \quad \text{— потужність критерію.}$$

Різні варіанти при перевірці гіпотез

Істина	**Прийняте рішення**	**Тип помилки**	**Імовірність**
H_0 істинна	H_0 не відхиляється	Немає помилки	$P(K \in O \mid H_0) = 1-\alpha$
	H_0 відхиляється	Помилка I роду	$P(K \in W \mid H_0) = \alpha$
H_0 хибна	H_0 не відхиляється	Помилка II роду	$P(K \in O \mid H_1) = \beta$
	H_0 відхиляється	Немає помилки	$P(K \in W \mid H_1) = 1-\beta$

4. Однобічні та двобічні перевірки

Тип альтернативної гіпотези визначає форму критичної області.

1) Двобічна перевірка:

$$H_0: \ \theta = \theta_0, \qquad H_1: \ \theta \neq \theta_0.$$

Критична область складається з двох «хвостів» розподілу критерію.

2) Правобічна перевірка:

$$H_0: \ \theta \le \theta_0, \qquad H_1: \ \theta > \theta_0.$$

3) Лівобічна перевірка:

$$H_0: \ \theta \ge \theta_0, \qquad H_1: \ \theta < \theta_0.$$

Для кожного випадку критичні значення підбирають так, щоб забезпечити задану α.

5. p-значення як універсальний формат рішення

Замість табличного порівняння K з критичною точкою часто використовують p-значення:

$$p = \text{мінімальний рівень значущості, за якого } H_0 \text{ було б відхилено.}$$

Правило:

$$p < \alpha \implies H_0 \text{ відхиляють,} \qquad p \ge \alpha \implies H_0 \text{ не відхиляють.}$$

p-значення *не* є імовірністю того, що H_0 істинна; воно є характеристикою узгодженості спостережених даних із H_0.

6. Параметричні критерії для нормальних сукупностей: базовий набір

6.1. Перевірка систематичної похибки (перевірка середнього)

Нехай $X_1, \ldots, X_n$ — незалежні спостереження з $N(\mu, \sigma^2)$. Перевіряємо:

$$H_0: \ \mu = \mu_0, \qquad H_1: \ \mu \neq \mu_0.$$

Випадок 1: дисперсія σ^2 відома. Критерій:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

За H_0:

$$Z \sim N(0, 1).$$

Двобічна критична область:

$$|Z| > z_{1-\alpha/2}.$$

Випадок 2: дисперсія невідома. Оцінимо:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Критерій:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

За H_0:

$$t \sim t_\nu, \qquad \nu = n - 1.$$

Двобічна критична область:

$$|t| > t_{1-\alpha/2, \ \nu}.$$

6.2. Перевірка дисперсії (стабільність/відтворюваність одного методу)

Якщо $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ та перевіряємо:

$$H_0: \ \sigma^2 = \sigma_0^2, \qquad H_1: \ \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

то статистика

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

за H_0 має розподіл χ^2_ν, $\nu = n - 1$. Для двобічної перевірки критична область:

$$\chi^2 < \chi^2_{\alpha/2, \ \nu} \quad \text{або} \quad \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2, \ \nu}.$$

6.3. Порівняння двох дисперсій: F-критерій (відтворюваність двох методів)

Нехай незалежні вибірки з нормальних сукупностей мають дисперсії σ_1^2, σ_2^2. Перевіряємо:

$$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \qquad H_1:\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Критерій:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2},$$

де S_1^2, S_2^2 — вибіркові дисперсії. За H_0:

$$F \sim F_{\nu_1,\nu_2}, \qquad \nu_1 = n_1 - 1,\ \nu_2 = n_2 - 1.$$

Двобічна критична область задається через дві критичні точки (нижню і верхню), що відповідають $\alpha/2$ у хвостах.

7. Порівняння центрів двох незалежних нормальних сукупностей

7.1. Великі вибірки або відомі дисперсії (Z-критерій)

Перевіряємо:

$$H_0:\ \mu_X = \mu_Y, \qquad H_1:\ \mu_X \neq \mu_Y.$$

Якщо σ_X^2, σ_Y^2 відомі, тоді

$$z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}, \qquad z \sim N(0,1) \text{ за } H_0.$$

Критична область:

$$|z| > z_{1-\alpha/2}.$$

7.2. Малі вибірки, дисперсії невідомі але рівні (t-критерій з об'єднаною дисперсією)

Нехай дисперсії невідомі, але припускаємо $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Тоді вводять об'єднану дисперсію:

$$S_p^2 = \frac{(n_X - 1)S_X^2 + (n_Y - 1)S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}.$$

Критерій:

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}.$$

За H_0:

$$t \sim t_\nu, \qquad \nu = n_X + n_Y - 2.$$

Двобічна критична область:

$$|t| > t_{1-\alpha/2,\ \nu}.$$

8. Перевірка вибірки на однорідність: критерії Діксона (виявлення промахів)

У практичних вимірюваннях часто виникає задача виявлення **промахів** (викидів), що можуть бути наслідком грубих помилок.

Формулювання:

$$H_0: \text{ вибірка однорідна, промахів немає,} \qquad H_1: \text{ вибірка містить промах(и).}$$

Дані впорядковують:

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n.$$

Ідея критеріїв Діксона: порівняти підозріле крайнє значення з «типовим» розмахом вибірки через спеціально побудоване відношення різниць (квантильні таблиці для цих відношень задані окремо).

Прикладова форма (одна з поширених для перевірки мінімального значення):

$$Q = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1},$$

а для перевірки максимального:

$$Q = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}.$$

Далі Q порівнюють з критичним $Q_\alpha(n)$ з таблиць. Якщо $Q > Q_\alpha(n)$, то H_0 відхиляють і підозріле значення розглядають як промах.

Зауваження: застосовність критеріїв Діксона передбачає нормальність основної сукупності та відсутність множинних промахів; при складніших сценаріях потрібні інші процедури.

9. Потужність та вибір обсягу вибірки: концептуальний каркас

Потужність $1 - \beta$ не є «бонусом», вона купується за рахунок:

- збільшення обсягу вибірки n;
- зменшення шуму (меншої дисперсії вимірювань);
- використання більш чутливого дизайну (парні спостереження, блокування тощо);
- вибору однобічної перевірки, якщо вона методично обґрунтована.

Наприклад, у перевірці середнього (при відомій σ) параметром, що визначає потужність, є величина зсуву

$$\Delta = \mu - \mu_0,$$

а критеріальна статистика Z за H_1 має зсунутий розподіл із математичним сподіванням

$$M(Z \mid H_1) = \frac{\Delta}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Це показує фундаментальну залежність: фіксований зсув Δ стає статистично «видимим» при зростанні $\sqrt{n}$.

10. Рекомендований алгоритм виконання перевірки гіпотез

1. Чітко сформулювати H_0 та H_1 (з визначенням параметра θ).
2. Вибрати статистичну модель та умови застосовності (нормальність, незалежність, рівність дисперсій тощо).
3. Обрати критерій K і розподіл K за H_0.
4. Задати рівень значущості α.
5. Побудувати критичну область W (або обчислити p-значення).
6. Обчислити значення критерію за даними.
7. Зробити висновок: відхилити чи не відхилити H_0, вказавши α та, за потреби, p-значення.
8. Інтерпретувати результат у предметному контексті, не підміняючи статистичне рішення «філософією причинності».

11. Підсумок

Перевірка гіпотез — це дисципліна про контроль ризиків помилкових рішень у присутності випадковості. Вона оперує:

- формальними правилами критичних областей;
- кількісним контролем помилок через α і β;
- стандартним набором критеріїв Z, t, χ^2, F для нормальних моделей;
- прикладними процедурами (як-от критерії Діксона) для контролю якості даних.

Контрольні запитання (для самоперевірки):

1. Чому перевіряють H_0, а не «доводять» H_1?
2. Як альтернативна гіпотеза визначає форму критичної області?
3. Який зміст мають α та β, і чому їх не можна зменшити одночасно без наслідків?
4. У яких умовах застосовують критерій Z, а коли обов'язковий критерій t?
5. Для чого використовується χ^2-критерій та які його степені вільності?
6. Які припущення потрібні для F-критерію порівняння дисперсій?
7. У чому логіка критеріїв Діксона і які їхні обмеження?
8. Чим p-значення відрізняється від «імовірності істинності H_0»?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Лекція № 9

Тема: Кореляційний та регресійний аналіз

Мета: Розкрити суть статистичного взаємозв'язку між ознаками, ввести поняття кореляційної залежності та регресії. Навчити розраховувати та інтерпретувати коефіцієнт кореляції, будувати лінійні регресійні моделі за методом найменших квадратів та оцінювати їх статистичну значущість.

Основні поняття: функціональний та статистичний зв'язок; факторна (пояснювальна) ознака X; результативна (відгук) ознака Y; кореляційна залежність; умовне математичне сподівання; функція регресії; коваріація; коефіцієнт кореляції (генеральний та вибірковий); кореляційне поле; лінійна регресія; параметри β_0, β_1; випадкова похибка; залишки; МНК; нормальні рівняння; розклад сум квадратів $SST = SSR + SSE$; коефіцієнт детермінації R^2; стандартні похибки оцінок; довірчі інтервали; перевірка гіпотез; припущення лінійної моделі.

1. Функціональний і статистичний зв'язок

Між двома ознаками X та Y розрізняють:

1) Функціональний (детермінований) зв'язок:

$$Y = f(X),$$

тобто для кожного значення X існує єдине значення Y. У цьому випадку мінливість Y повністю пояснюється X.

2) Статистичний (ймовірнісний) зв'язок:

$$Y = f(X) + \varepsilon,$$

де ε — випадкова складова (шум, похибка вимірювання, не враховані чинники тощо). Тут одному X відповідає розподіл можливих значень Y, а не єдине число.

2. Кореляційна залежність і функція регресії

Залежність умовного математичного сподівання результативної ознаки Y від значень факторної ознаки X називається **кореляційною залежністю**:

$$M(Y \mid X = x) = f(x).$$

Функцію $f(x)$ називають **функцією регресії**. Вона описує, як змінюється *середній рівень* Y при зміні X, а не траєкторію окремих спостережень.

Кореляційне поле — графічне зображення пар (x_i, y_i) на площині. Воно дає якісне уявлення про форму зв'язку (лінійний, монотонний, нелінійний, відсутній) та про наявність викидів.

3. Коваріація та коефіцієнт кореляції

3.1. Генеральні характеристики

Нехай $\mu_X = M(X)$, $\mu_Y = M(Y)$. **Коваріація**:

$$\sigma_{XY} = M\big[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\big].$$

Якщо $\sigma_{XY} > 0$, то великі значення X мають тенденцію відповідати великим значенням Y; якщо $\sigma_{XY} < 0$ — навпаки. Недолік коваріації: вона має розмірність $X \cdot Y$ і залежить від одиниць виміру.

Коефіцієнт кореляції (Пірсона):

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}, \qquad \sigma_X^2 = M[(X - \mu_X)^2], \quad \sigma_Y^2 = M[(Y - \mu_Y)^2].$$

Властивості:

$$-1 \le \rho_{XY} \le 1.$$

Якщо $|\rho_{XY}| = 1$, зв'язок *лінійно детермінований*. Якщо $\rho_{XY} = 0$, то *лінійна* кореляція відсутня (але можливий нелінійний зв'язок).

3.2. Вибіркові оцінки

Нехай маємо вибірку $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$. Вибіркові середні:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Центровані суми:

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \qquad S_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \qquad S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

Тоді **вибірковий коефіцієнт кореляції**:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}}.$$

Зауваження: формула має сенс лише коли $S_{xx} > 0$ та $S_{yy} > 0$ (ознаки не є сталими у вибірці).

3.3. Інтерпретація кореляції

Абсолютне значення r оцінює щільність *лінійного* зв'язку:

- $r \approx 0$: лінійний зв'язок слабкий або відсутній;
- r близьке до ± 1: сильна лінійна залежність;
- знак r задає напрям асоціації.

Кореляція не є причинністю: вона фіксує статистичну узгодженість, а причинні висновки визначаються дизайном дослідження.

4. Перевірка значущості кореляції

Нульова гіпотеза:

$$H_0: \ \rho_{XY} = 0.$$

За припущення двовимірної нормальності (X, Y) (або наближено за великих n) статистика

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

підпорядковується t-розподілу з $n-2$ ступенями вільності. Критична область задається через $t_{\alpha/2,\ n-2}$ (двобічна перевірка) або відповідні однобічні критичні значення.

5. Регресійний аналіз: постановка задачі

Регресійний аналіз спрямований на побудову **моделі середнього** Y як функції X та на оцінювання параметрів цієї моделі за даними.

У найпростішому випадку **лінійної регресії** (один фактор):

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

де ε_i — похибки моделі.

Оцінене рівняння регресії:

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i.$$

Залишок:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i.$$

Зміст b_1: очікувана зміна середнього рівня Y при збільшенні X на одиницю (за умов, що лінійна модель адекватна).

6. Метод найменших квадратів (МНК)

6.1. Критерій МНК

Вибирають b_0, b_1, що мінімізують суму квадратів залишків:

$$S(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (b_0 + b_1 x_i)\big)^2.$$

6.2. Нормальні рівняння

Умови мінімуму $\frac{\partial S}{\partial b_0} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial b_1} = 0$ приводять до системи:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum x_i = \sum y_i, \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i. \end{cases}$$

6.3. Явні формули оцінок

Використовуючи центровані суми S_{xx} і S_{xy}, маємо компактний запис:

$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \qquad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}.$$

Еквівалентна форма (через нецентровані суми) також коректна:

$$b_1 = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \qquad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}.$$

6.4. Геометрична інтерпретація (корисна для академічного рівня)

МНК обирає таку пряму, щоб вектор залишків $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ був ортогональний до підпростору, натягнутого на вектори $(1, \ldots, 1)$ та $(x_1, \ldots, x_n)$. Звідси випливають дві фундаментальні тотожності:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0.$$

7. Розклад мінливості у регресії: $SST = SSR + SSE$

Введемо:

$$SST = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2, \qquad SSR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2, \qquad SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum e_i^2.$$

Тоді для лінійної регресії з вільним членом виконується розклад:

$$SST = SSR + SSE.$$

Це прямий аналог ANOVA-розкладу: загальна мінливість Y розкладається на частину, пояснену регресією, і частину, що залишилась у вигляді похибок.

8. Оцінка дисперсії похибки та стандартні похибки коефіцієнтів

8.1. Оцінка σ^2

За стандартними припущеннями $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ незалежні, оцінка дисперсії похибки:

$$s^2 = \frac{SSE}{n-2}.$$

8.2. Стандартні похибки

Стандартна похибка оцінки нахилу:

$$\mathrm{SE}(b_1) = \sqrt{\frac{s^2}{S_{xx}}}.$$

Стандартна похибка оцінки вільного члена:

$$\mathrm{SE}(b_0) = \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}} \right)}.$$

9. Перевірка значущості регресії

9.1. Перевірка $H_0 : \beta_1 = 0$ t-критерієм

Нульова гіпотеза:

$$H_0 : \ \beta_1 = 0.$$

Статистика:

$$t = \frac{b_1}{\mathrm{SE}(b_1)}.$$

За H_0 маємо t-розподіл з $n - 2$ ступенями вільності.

9.2. Перевірка $H_0 : \beta_1 = 0$ F-критерієм

Оскільки у простій лінійній регресії один параметр відповідає ефекту X, використовують:

$$F = \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)}, \qquad \nu_1 = 1, \ \nu_2 = n - 2.$$

Критична область:

$$F > F_{\alpha,\ 1,\ n-2}.$$

Для простої лінійної регресії виконується тотожність:

$$F = t^2,$$

де t — t-статистика для перевірки $H_0 : \beta_1 = 0$.

10. Коефіцієнт детермінації та зв'язок з кореляцією

Коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}.$$

Його зміст: частка варіації Y, яка пояснюється лінійною регресією на X.

У простій лінійній регресії з вільним членом має місце зв'язок:

$$R^2 = r^2,$$

де r — вибірковий коефіцієнт кореляції між X та Y.

11. Довірчі інтервали

Для нахилу β_1 довірчий інтервал рівня $1-\alpha$:

$$b_1 \pm t_{\alpha/2,\ n-2}\,\mathrm{SE}(b_1).$$

Для β_0:

$$b_0 \pm t_{\alpha/2,\ n-2}\,\mathrm{SE}(b_0).$$

Зауваження: ці інтервали коректні за класичних припущень про нормальність та однорідність дисперсії похибок.

12. Прогноз і довірчі смуги

Прогноз середнього значення при $X = x_0$:

$$\widehat{M(Y \mid X = x_0)} = \hat{y}(x_0) = b_0 + b_1 x_0.$$

Для оцінювання невизначеності прогнозу розрізняють:

- інтервал для *середнього* (вужчий);
- прогнозний інтервал для *окремого* майбутнього спостереження (ширший, бо включає шум ε).

У базовому курсі важливо розуміти концептуальну відмінність, навіть якщо формули вводяться пізніше.

13. Припущення лінійної регресії та аналіз залишків

Класична модель спирається на:

1. лінійність $M(Y \mid X) = \beta_0 + \beta_1 X$;
2. незалежність похибок ε_i;
3. однакову дисперсію: $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$;
4. нормальність похибок (для точних t- та F-висновків).

Аналіз залишків e_i використовується для виявлення:

- нелінійності (систематичні структури в e_i проти x_i);
- гетероскедастичності (зміна розкиду залишків);
- викидів (нетипово великі $|e_i|$);
- впливових точок (значення x_i з великою «важільністю»).

14. Узагальнення: множинна регресія (коротко)

Якщо факторів кілька $X_1, \ldots, X_p$, модель:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i.$$

Тут β_k інтерпретується як зміна середнього Y при зміні X_k на одиницю за фіксованих інших факторів. Перевірка значущості може виконуватись:

- для окремого коефіцієнта (t-тест);
- для всієї моделі або групи коефіцієнтів (F-тест вкладених моделей).

15. Підсумок

Кореляційний аналіз дає *міру лінійної узгодженості* двох ознак, тоді як регресійний аналіз задає *модель умовного середнього* та дозволяє:

- оцінювати параметри залежності;
- перевіряти статистичну значущість;
- пояснювати частку мінливості та виконувати прогнозування;
- аналізувати адекватність моделі через залишки.

Контрольні запитання (для самоперевірки):

1. У чому відмінність між функціональним та статистичним зв'язком?
2. Чому $\rho_{XY} = 0$ не виключає нелінійної залежності?
3. Як через S_{xx} та S_{xy} записуються оцінки b_0, b_1?
4. Який зміст має розклад $SST = SSR + SSE$ у регресії?
5. Як пов'язані між собою R^2 та r у простій лінійній регресії?
6. Чому у простій регресії $F = t^2$?
7. Які припущення лежать в основі t- та F-висновків для регресії?
8. Навіщо аналізують залишки і які типові порушення він виявляє?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Лекція № 10

Тема: Дисперсійний аналіз

Мета: Ознайомити з методом дисперсійного аналізу (ANOVA) для оцінки впливу одного або кількох факторів на результативну ознаку. Розглянути моделі дисперсійного аналізу, логіку розкладання загальної мінливості на складові та процедуру перевірки гіпотез за допомогою F-критерію.

Основні поняття: Дисперсійний аналіз, фактор, рівні фактора, однофакторний та багатофакторний аналіз, план експерименту, модель дисперсійного аналізу, генеральне середнє, диференціальний ефект, залишкова мінливість (внутрішньогрупова), факторіальна мінливість (міжгрупова), середній квадрат відхилень.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

1. Загальна ідея ANOVA як теорії порівняння моделей

Дисперсійний аналіз (ANOVA, *analysis of variance*) історично виник як відповідь на просте запитання: якщо груп більше ніж дві, як порівнювати середні, не перетворюючи аналіз на серію довільних парних перевірок із неконтрольованою частотою хибних висновків?

Ключовий принцип ANOVA полягає не в «магії дисперсій», а в порівнянні **двох вкладених статистичних моделей**:

- **Нульова модель** не дозволяє групам мати різні середні (усі спостереження мають спільний центр).
- **Альтернативна модель** дозволяє середнім різнитись відповідно до факторної структури.

Різницю якості підгонки моделей вимірюють через зменшення залишкової суми квадратів, а нормування цього зменшення степенями вільності приводить до F-критерію.

2. Однофакторний дисперсійний аналіз: параметрична модель фіксованих рівнів

2.1. Постановка та нотація

Нехай фактор A має I рівнів $A_1, \ldots, A_I$. На рівні A_i спостерігаємо n_i значень $y_{i1}, \ldots, y_{in_i}$. Загальна кількість спостережень:

$$n = \sum_{i=1}^{I} n_i.$$

Позначимо групові середні та загальне середнє:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{I} n_i \bar{y}_i.$$

2.2. Модель (фіксовані рівні)

Параметрична модель однофакторного ANOVA:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij},$$

де μ — спільний для всіх рівнів параметр, α_i — ефект i-го рівня фактора, ε_{ij} — похибка.

Щоб модель була ідентифікована, вводять обмеження, наприклад:

$$\sum_{i=1}^{I} n_i \alpha_i = 0 \qquad \text{(зважене центроване обмеження)}.$$

Для балансованого дизайну $n_i = n_0$ часто використовують $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0$.

2.3. Гіпотези

Нульова гіпотеза «фактор не впливає» у термінах ефектів:

$$H_0: \ \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_I = 0.$$

Еквівалентне формулювання у термінах середніх:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_I, \qquad \text{де } \mu_i = \mu + \alpha_i.$$

Альтернатива:

$$H_1: \ \text{існують } i \neq k \text{ такі, що } \mu_i \neq \mu_k.$$

3. Розклад сум квадратів: алгебра без романтики

3.1. Повна сума квадратів

Повну мінливість (відносно загального середнього) задають як

$$SST = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2.$$

3.2. Внутрішньогрупова сума квадратів

Залишкова (внутрішньогрупова) мінливість:

$$SSW = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2.$$

3.3. Міжгрупова сума квадратів

Факторіальна (міжгрупова) мінливість:

$$SSA = \sum_{i=1}^{I} n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2.$$

3.4. Доведення розкладу $SST = SSA + SSW$

Почнемо з тотожності

$$y_{ij} - \bar{y} = (y_{ij} - \bar{y}_i) + (\bar{y}_i - \bar{y}).$$

Тоді

$$(y_{ij} - \bar{y})^2 = (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + 2(y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \bar{y}) + (\bar{y}_i - \bar{y})^2.$$

Просумуємо за j у фіксованій групі i:

$$\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + 2(\bar{y}_i - \bar{y})\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i) + \sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_i - \bar{y})^2.$$

Але

$$\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i) = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} - n_i\bar{y}_i = 0,$$

а також

$$\sum_{j=1}^{n_i}(\bar{y}_i - \bar{y})^2 = n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2.$$

Отже, для кожного i:

$$\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + n_i(\bar{y}_i - \bar{y})^2.$$

Після сумування за i дістаємо

$$SST = SSW + SSA.$$

Це фундаментальна тотожність ANOVA: загальна мінливість розкладається на частину, що пояснюється фактором, та частину, що залишається всередині груп.

4. Степені вільності та середні квадрати

4.1. Степені вільності

- Для SST: $\nu_T = n - 1$, оскільки $\bar{y}$ оцінено з n спостережень.
- Для SSW: $\nu_W = n - I$, оскільки в кожній групі оцінено $\bar{y}_i$, разом I оцінок.
- Для SSA: $\nu_A = I - 1$, бо $\sum_{i=1}^{I} n_i(\bar{y}_i - \bar{y}) = 0$, тобто маємо одну лінійну залежність.

Зв'язок:

$$(n - 1) = (I - 1) + (n - I).$$

4.2. Середні квадрати

Середні квадрати (сума квадратів, нормована степенями вільності):

$$MSA = \frac{SSA}{I - 1}, \qquad MSW = \frac{SSW}{n - I}.$$

Інтерпретаційно MSW є оцінкою дисперсії похибки, тоді як MSA містить у собі й похибку, й внесок міжгрупових відмінностей.

5. F-критерій як наслідок теорії квадратичних форм

5.1. Статистика

$$F = \frac{MSA}{MSW}.$$

5.2. Припущення, за яких працює класичний F-тест

Класичний ANOVA (у вигляді «табличного» F-тесту) спирається на:

1. **Незалежність** похибок ε_{ij}.
2. **Нормальність**: $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$.
3. **Однакова дисперсія** в усіх групах: $\mathrm{Var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$.

5.3. Чому саме F? (концептуальний вивід)

За H_0 усі групи мають спільний центр, тому «міжгрупова мінливість» має бути співмірною із «внутрішньогруповою». Якщо ж H_1 істинна, то SSA зростає систематично (бо $\bar{y}_i$ віддаляються від $\bar{y}$), тоді як SSW описує шум навколо групових центрів.

Формально, за нормальності похибок:

$$\frac{SSW}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-I}, \qquad \frac{SSA}{\sigma^2} \sim \chi^2_{I-1},$$

і ці дві квадратичні форми є незалежними. Тоді

$$\frac{SSA/(I-1)}{SSW/(n-I)} \sim F_{I-1,\ n-I}.$$

Отже, критична область має вигляд:

$$F > F_{\alpha,\ I-1,\ n-I}.$$

6. ANOVA-таблиця (академічний стандарт подання)

Зручно організувати результат у вигляді таблиці:

Джерело мінливості	Сума квадратів	Ступені вільності	Середній квадрат	F
Фактор A	SSA	$I-1$	MSA	MSA/MSW
Похибка (всередині груп)	SSW	$n-I$	MSW	—
Загальна	SST	$n-1$	—	—

7. Оцінювання параметрів та зв'язок із методом найменших квадратів

Оцінки, які мінімізують SSW, мають вигляд:

$$\widehat{\mu} = \bar{y}, \qquad \widehat{\mu}_i = \bar{y}_i, \qquad \widehat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{y}.$$

Це відображає глибинний факт: однофакторний ANOVA є спеціальним випадком лінійної моделі найменших квадратів.

8. Контрасти та множинні порівняння (після того, як H_0 відхилено)

Відхилення H_0 говорить лише «не всі рівні однакові», але не каже, *які саме* різняться. Для цього використовують:

8.1. Лінійні контрасти

Контраст задають коефіцієнтами $c_1, \ldots, c_I$ з умовою $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$:

$$L = \sum_{i=1}^{I} c_i \mu_i, \qquad \widehat{L} = \sum_{i=1}^{I} c_i \bar{y}_i.$$

За класичних припущень

$$\mathrm{Var}(\widehat{L}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{n_i}, \qquad \widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{L}) = MSW \sum_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{n_i}.$$

Тоді t-статистика:

$$t = \frac{\widehat{L}}{\sqrt{MSW \sum_{i=1}^{I} \frac{c_i^2}{n_i}}}$$

порівнюється з критичними значеннями з урахуванням множинності (за потреби).

8.2. Поправки на множинність

Поширені підходи (ідеологічно різні):

- Бонферроні: контролює сумарну імовірність хибних відхилень шляхом заміни α на α/m, де m — число перевірок.
- Тьюкі (Tukey HSD): орієнтований на всі парні порівняння середніх та використовує розподіл студентізованого діапазону.

9. Розмір ефекту: щоб не плутати «істотність» із «вагою»

Навіть дуже малий ефект може давати мале p-значення при великому n. Тому поряд із F-тестом повідомляють розмір ефекту, наприклад:

$$\eta^2 = \frac{SSA}{SST}, \qquad \text{(частка загальної мінливості, пов'язана з фактором).}$$

Для моделей з кількома факторами використовують часткові аналоги, де в знаменнику стоїть відповідна сума квадратів «ефект + похибка».

10. Перевірка припущень та робастність

Класична ANOVA є досить стійкою до помірних відхилень від нормальності за умови приблизної рівності дисперсій та відсутності сильних перекосів у вибірках, але **не любить**:

- різко неоднакові дисперсії між групами;
- наявність викидів, які «перетягують» середні;
- залежні спостереження (повторні вимірювання без моделювання кореляції).

Тому в академічному аналізі завжди окремо фіксують: незалежність (через дизайн), однорідність дисперсій (через діагностики), нормальність залишків (через діагностики).

11. Двофакторний дисперсійний аналіз: головні ефекти та взаємодія

11.1. Модель з взаємодією

Нехай є фактор A з рівнями $i = 1, \dots, I$ та фактор B з рівнями $k = 1, \dots, K$. У комірці (i, k) маємо n_{ik} спостережень y_{ikj}. Модель:

$$y_{ikj} = \mu + \alpha_i + \beta_k + (\alpha\beta)_{ik} + \varepsilon_{ikj}.$$

Тут $(\alpha\beta)_{ik}$ — ефект взаємодії: відхилення від адитивності.

11.2. Гіпотези

Перевіряють окремо:

$$H_0^{(A)}: \ \alpha_1 = \cdots = \alpha_I = 0, \qquad H_0^{(B)}: \ \beta_1 = \cdots = \beta_K = 0,$$
$$H_0^{(AB)}: \ (\alpha\beta)_{ik} = 0 \text{ для всіх } i, k.$$

Наявність взаємодії означає: вплив A залежить від рівня B (і навпаки). У такому разі «головні ефекти» без уточнення контексту можуть бути концептуально бідними.

11.3. Розклад сум квадратів (ідея)

Загальна мінливість розкладається на:

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSW,$$

де $SSAB$ відповідає взаємодії, а SSW — залишковій мінливості всередині комірок. Точні формули залежать від балансованості дизайну; у балансованому випадку вони набувають особливо прозорих форм через ортогональність складових.

11.4. F-статистики

Для кожного джерела мінливості будують

$$F_A = \frac{MSA}{MSW}, \qquad F_B = \frac{MSB}{MSW}, \qquad F_{AB} = \frac{MSAB}{MSW},$$

де MS є відповідні середні квадрати, а степені вільності визначаються структурою факторів і числами спостережень.

12. ANOVA як частина загальної лінійної моделі (матричний запис)

Для поглибленого академічного бачення ANOVA найкраще розуміти як лінійну модель:

$$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n).$$

Тут X — матриця дизайну, $\boldsymbol{\theta}$ — вектор параметрів (ефекти), $\mathbf{y}$ — вектор спостережень.

Суми квадратів у цій мові є квадратичними формами:

$$SSW = \|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}\|^2, \qquad \widehat{\mathbf{y}} = P_X \mathbf{y},$$

де P_X — ортогональний проєктор на підпростір стовпців X. Порівняння вкладених моделей означає порівняння відповідних проєкторів і, як наслідок, породжує F-тест як відношення двох незалежних нормованих квадратичних форм.

13. План експерименту: те, без чого ANOVA перетворюється на симулякр

У дисперсійному аналізі статистика лише формалізує те, що вже закладено у дизайн. Академічно коректний план включає:

1. **Рандомізацію** (щоб незалежність не була міфом).
2. **Реплікацію** (щоб оцінка MSW існувала як змістовний об'єкт).
3. **Контроль змішувальних чинників** (блокування, стратифікація, коваріати).
4. **Баланс** (за можливості), бо він дає простіший розклад і чистішу інтерпретацію.

14. Алгоритм виконання однофакторного ANOVA (без числових прикладів, але з логікою)

1. Записати дані у вигляді груп $A_1, \ldots, A_I$ та обчислити $\bar{y}_i$ і $\bar{y}$.
2. Обчислити SSW та SSA, перевірити тотожність $SST = SSA + SSW$.
3. Обчислити MSA та MSW.
4. Обчислити $F = MSA/MSW$.
5. Порівняти F з $F_{\alpha,\ I-1,\ n-I}$ або отримати p-значення з розподілу $F_{I-1,n-I}$.
6. Якщо H_0 відхилено, перейти до контрастів/множинних порівнянь із контролем множинності.
7. Повідомити розмір ефекту η^2 та зробити висновок у термінах предметної області.

15. Типові помилки інтерпретації (і як їх уникати)

- **Помилка 1:** «ANOVA доводить причинність». Ні: причинність задає дизайн (рандомізація, контроль), а ANOVA лише оцінює узгодженість даних з моделлю.
- **Помилка 2:** «Якщо $p < \alpha$, то ефект великий». Ні: потрібен розмір ефекту.
- **Помилка 3:** «Відхилення H_0 означає, що всі групи різні». Ні: відхилення означає лише, що не всі середні збігаються.
- **Помилка 4:** «Можна ігнорувати взаємодію у двофакторній схемі». Ні: взаємодія є окремим змістовним твердженням про неадитивність впливів.

16. Підсумок

ANOVA — це:

- алгебраїчно строгий розклад SST на структурні компоненти;
- статистичний тест через порівняння нормованих квадратичних форм;
- методологія, сенс якої визначається планом експерименту;
- мова, що природно узагальнюється до багатофакторних схем, взаємодій, блоків, коваріат (ANCOVA) та багатовимірних відповідей (MANOVA).

Контрольні запитання (для самоперевірки):

1. Чому для багатьох груп небажано робити багато парних t-тестів без поправок?
2. Який зміст має тотожність $SST = SSA + SSW$ і де саме в доведенні «зникає» змішаний член?
3. Як інтерпретувати MSW у термінах моделі похибки?
4. Які степені вільності мають SSA і SSW, і чому вони саме такі?
5. Що означає взаємодія у двофакторній моделі й чому вона важлива для інтерпретації?
6. Чим «істотність» відрізняється від «розміру ефекту»?
7. Які припущення потрібні для класичного F-тесту і що стається, якщо їх порушено?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.