МІНІСТЕРСТВО ОХОРОНИ ЗДОРОВ'Я УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МЕДИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет: Фармацевтичний
Кафедра фізіології та біофізики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з науково-педагогічної роботи

____
Едуард БУРЯЧКІВСЬКИЙ
02 вересня 2024 року

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Рівень вищої освіти: другий (магістерський)

Галузь знань: 22 «Охорона здоров'я»

Спеціальність: 226 «Фармація, промислова фармація»

Освітньо-професійна програма: Фармація

Одеса – 2024

Затверджено:

Засіданням кафедри фізіології та біофізики
Одеського національного медичного університету

Протокол № 1 від 26 серпня 2024 року

Завідувач кафедри ______________________ Леонід Годлевський

Розробники:

завідуючий кафедри, д.мед.н., проф. Годлевський Л.С.
доцент кафедри, к.ф.-м.н., Жуматій П.Г.
завуч кафедри, магістр, ст.викл. Марченко С.В.

Практичне заняття № 1

Тема: Диференціальне числення

Мета: навчити здобувачів свідомо використовувати апарат диференціального числення при вирішенні задач медико-біологічного профілю, зокрема обчислювати похідні функцій однієї змінної та застосовувати їх для дослідження функцій.

Основні поняття: похідна функції однієї змінної, механічний та геометричний зміст похідної, таблиця похідних, правила диференціювання, зростаюча та спадна функція, критичні точки, екстремум (максимум та мінімум), диференціал.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Похідна функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0. Надамо аргументу x_0 приріст Δx так, щоб точка $x_0 + \Delta x$ належала цьому околу. Тоді функція одержить приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля. Позначається $y'(x_0)$ або $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Механічний зміст похідної. Якщо $s(t)$ — закон прямолінійного руху матеріальної точки, то похідна $s'(t)$ є миттєвою швидкістю точки в момент часу t.

Геометричний зміст похідної. Значення похідної $f'(x_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту (тангенсу кута нахилу) дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

Таблиця похідних основних елементарних функцій:

- $(C)' = 0$, де C — стала
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Правила диференціювання. Нехай $u(x)$ та $v(x)$ — диференційовні функції.

1. Похідна суми/різниці: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
2. Похідна добутку: $(uv)' = u'v + uv'$.
3. Похідна частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
4. Похідна складеної функції (ланцюгове правило): Якщо $y = f(u)$ і $u = g(x)$, то $y'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$.

Дослідження функцій за допомогою похідної.

- **Зростання та спадання:** Якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі, то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі. Якщо $f'(x) < 0$, то функція спадає.
- **Критичні точки:** Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує.
- **Екстремуми:** Якщо в критичній точці похідна змінює знак з «+» на «-», це точка локального максимуму. Якщо з «-» на «+», це точка локального мінімуму.

Диференціал функції

На основі визначення похідної та границі можна записати

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \alpha(\Delta x),$$

де функція $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а також

$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Тепер знаходимо приріст функції у вигляді суми двох доданків

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Перший доданок лінійно залежить від приросту аргументу й визначає головну частину приросту функції, якщо $\alpha(\Delta x)\Delta x \to 0$.

Головна лінійна частина приросту функції $dy = f'(x_0)\Delta x$ називається **диференціалом** функції $f(x)$ в точці x_0.

Геометричний зміст диференціала — це приріст ординати дотичної.

Диференціал залежить і від значення аргументу, і від його приросту. Величину $\Delta x = dx$ називають диференціалом незалежної змінної. Тому диференціал визначають як добуток похідної на диференціал аргументу:

$$dy = f'(x)dx.$$

На основі такого визначення похідна функції дорівнює відношенню диференціала функції до диференціала аргументу:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Операція *диференціювання* полягає в тому, щоб знайти похідну або диференціал. Функцію $y = f(x)$ вважають диференційовною в точці x_0, якщо в цій точці існує диференціал функції.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Кулеподібна клітина радіуса r, не змінюючи своєї форми, безперервно збільшується в об'ємі. Визначити зміну об'єму клітини, якщо її радіус збільшився від $r_1 = 10^{-5}$ м до $r_2 = 1.01 \cdot 10^{-5}$ м.

Рішення. Об'єм кулі визначається за формулою

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Шукану зміну об'єму одержимо, диференціюючи це рівняння

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Підставляючи значення радіуса $r = 10^{-5}$ м та $dr = r_2 - r_1 = 0.01 \cdot 10^{-5}$ м, маємо

$$dV = 4\pi(10^{-5})^2 \cdot (0.01 \cdot 10^{-5}) = 4\pi(10^{-10}) \cdot (10^{-7}) = 4\pi \cdot 10^{-17} \text{ м}^3.$$

Задачі для самоконтролю

1. Знайдіть диференціали для наведених далі функцій:

1. $y = -3x^2 + 5$ (Правильна відповідь: $dy = -6xdx$)
2. $y = -\cos(2x) + 5$ (Правильна відповідь: $dy = 2\sin(2x)dx$)
3. $y = 2^x$ (Правильна відповідь: $dy = 2^x \ln(2)dx$)
4. $y = x^2 \ln(x)$ (Правильна відповідь: $dy = (2x\ln(x) + x)dx$)
5. $y = \sin(x^4)$ (Правильна відповідь: $dy = 4x^3 \cos(x^4)dx$)

2. Задачі:

1. Потужність W, споживана легенями, та легенева вентиляція V пов'язані співвідношенням
$$W = \frac{A}{a}V^3,$$
де A та a - сталі. Знайти зміну потужності dW, що супроводжує збільшення легеневої вентиляції dV.

2. Відомо, що приймання їжі або глюкози викликає відхилення цукру крові від норми, яке потім ліквідується системою вуглеводного обміну. Залежність між максимальним відхиленням y рівня цукру крові від норми та дозою глюкози D має вигляд
$$y = \frac{D}{D_0 + D},$$
де D_0 — стала. Визначити зміну dy у максимальному відхиленні рівня цукру крові від норми, якщо дозу глюкози збільшити на dD.

3. Гучність звуку E залежить від інтенсивності звуку I так

$$E = k \ln \frac{I}{I_0},$$

де k - коефіцієнт пропорційності, залежний від частоти, I_0 - поріг чутності на частоті 1 кГц. Визначити залежність зміни гучності dE від створюючої її зміни інтенсивності dI.

4. Загибель мікроорганізмів при впливі на них високої температури описується формулою

$$R = R_0(1 - e^{-aT}),$$

де R - кількість знищених бактерій, R_0 - початкова їх кількість, a - константа. Визначити зв'язок між зміною кількості знищених бактерій dR та зміною температури dT, що викликала її.

5. Гідродинамічний опір X, що надається ділянкою вени струму крові, дорівнює

$$X = \frac{8\eta l}{\pi R^4},$$

де η - в'язкість крові, l та R - довжина та радіус вени. Визначити зміну dX гідродинамічного опору, викликану зміною dR радіуса вени.

6. Імпеданс Z ділянки біологічної тканини дорівнює

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}},$$

де R - активний опір, C - ємність, а ω - кругова частота. На скільки зміниться імпеданс, якщо частоту збільшити на $d\omega$.

7. Основна формула дифракційної решітки

$$k\lambda = c \sin \phi,$$

встановлює зв'язок між довжиною хвилі λ світла, що падає на решітку, та кутом дифракції ϕ. Константи c та k - період решітки та порядок спектру. Знайти кутову дисперсію D решітки, що визначається формулою

$$D = \frac{d\phi}{d\lambda}.$$

8. Інтенсивність поляризованого світла I, що вийшло з аналізатора, залежить від кута α між головними площинами поляризатора та аналізатора за законом Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

де I_0 - інтенсивність світла, що вийшло з поляризатора. Як вплине на інтенсивність світла мала зміна кута $d\alpha$?

Контрольні запитання

1. Означення похідної, її механічний та геометричний зміст.
2. Правила диференціювання та таблиця похідних.
3. Означення диференціала аргументу та функції.
4. Геометричний зміст диференціала.
5. Диференціали елементарних функцій.
6. Правила знаходження диференціалів (суми, добутку, частки, складеної функції).
7. Як записують похідну через диференціали.
8. Диференціали вищих порядків.

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 2

Тема: Невизначений інтеграл. Визначений інтеграл

Мета: навчити здобувачів свідомо використовувати апарат інтегрального числення при вирішенні задач медико-біологічного профілю, обчислювати первісні, невизначені та визначені інтеграли, а також знаходити середнє значення функції.

Основні поняття: первісна функція, невизначений інтеграл, визначений інтеграл, геометричний зміст інтеграла, формула Ньютона-Лейбніца, метод заміни змінної, інтегрування частинами, середнє значення функції, кратні та криволінійні інтеграли.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$. Сукупність первісних $F(x) + C$ для даної функції $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом**.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

(читається: "невизначений інтеграл еф від ікс де ікс").

Термінологія:

- $\int$ - знак інтеграла
- x - змінна інтегрування
- $f(x)$ - підінтегральна функція
- $f(x)dx$ - підінтегральний вираз
- C - стала інтегрування.

Геометрично невизначений інтеграл представляє собою сім'ю кривих, рівняння яких відрізняються одне від одного сталим доданком C, і одержати їх можна паралельним перенесенням вздовж осі ординат.

Основні невизначені інтеграли:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan(x) + C$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot(x) + C$

Лінійні властивості операції інтегрування можна виразити однією формулою

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx,$$

де a та b - довільні сталі множники.

Метод інтегрування частинами На основі властивостей диференціала добутку $d(uv) = udv + vdu$ можна одержати формулу інтегрування частинами:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Інтегрування із застосуванням цієї формули називають *методом інтегрування частинами.*

Переходячи від невизначеного інтеграла до визначеного, ми переходимо від сім'ї функцій до конкретного числового значення, що має важливий геометричний та фізичний зміст.

Визначений інтеграл

Фігуру, обмежену лініями $y = 0$; $y = f(x)$; $x = a$; $x = b$, називають *криволінійною трапецією.* Площа цієї фігури є визначеним інтегралом. З урахуванням позначень меж інтервалу (нижньої a та верхньої b) і функції $f(x)$, визначений інтеграл записують так:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

(читається: "визначений інтеграл від a до b еф від ікс де ікс").

Термінологія:

- a - нижня межа інтегрування
- b - верхня межа інтегрування
- $[a, b]$ - область інтегрування.

Якщо для підінтегральної функції $f(x)$ відома первісна функція $F(x)$, то визначений інтеграл обчислюється за **формулою Ньютона-Лейбніца**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Визначеним інтегралом в межах від a до b від неперервної на проміжку $[a, b]$ функції $f(x)$ є приріст первісної $F(x)$ відносно меж інтегрування.

Визначений інтеграл застосовують, зокрема, для обчислення **середнього значення** $\bar{f}$ функції $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
5. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, для $a < b < c$.

Кратні та криволінійні інтеграли

Поняття визначеного інтеграла може бути узагальнено. Якщо за область інтегрування взяти:

- ділянку кривої, одержимо **криволінійний інтеграл**;
- деяку плоску поверхню, одержимо **подвійний інтеграл**;
- частину простору, одержимо **потрійний інтеграл**;
- частину кривої поверхні, одержимо **поверхневий інтеграл**.

Ці інтеграли широко використовуються у фізиці та біофізиці для опису потоків, роботи поля, маси об'єктів тощо.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Задача 1 (заміна змінної). Обчислити інтеграл $\int \cos(x)\sin(x)dx$. Спробуємо перетворити інтеграл у табличний за допомогою заміни змінної $t = \sin(x)$. Знаходимо диференціал: $dt = (\sin(x))'dx = \cos(x)dx$. Підставимо в інтеграл:

$$\int \sin(x)\underbrace{\cos(x)dx}_{dt} = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C.$$

Повертаємось до змінної x:

$$\int \cos(x)\sin(x)dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + C.$$

Задача 2 (інтегрування частинами). Обчислити $\int xe^x dx$. Приймемо $u = x$, $dv = e^x dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$. Застосовуємо формулу $\int udv = uv - \int vdu$:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Задача 3. Реакція на визначену дозу ліків через t годин після її приймання задається величиною $r(t) = te^{-t^2}$. Знайдіть величину сумарної реакції на задану дозу ліків за весь час дії.

Розв'язок. Сумарна реакція R визначається інтегралом від $t = 0$ до $t \to \infty$:

$$R = \int_0^{\infty} te^{-t^2} dt.$$

Зробимо заміну змінної: $u = -t^2$. Тоді $du = -2tdt$, звідки $tdt = -\frac{1}{2}du$. Змінимо межі інтегрування: якщо $t = 0$, то $u = 0$; якщо $t \to \infty$, то $u \to -\infty$.

$$R = \int_0^{-\infty} e^u \left(-\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^u du = \frac{1}{2}[e^u]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}(e^0 - \lim_{u \to -\infty} e^u) = \frac{1}{2}(1 - 0) = 0.5.$$

Отже, сумарна реакція на задану дозу ліків становить 0,5 умовних одиниць.

Задачі для самоконтролю

1. Знайдіть первісні функції для наведених далі функцій:

- $y = 3x^2 - 2x + 5$ (Правильна відповідь: $F(x) = x^3 - x^2 + 5x$)
- $u = -4\cos(x)$ (Правильна відповідь: $F(x) = -4\sin(x)$)
- $y = 2^x \ln(2)$ (Правильна відповідь: $F(x) = 2^x$)
- $y = 7e^x$ (Правильна відповідь: $F(x) = 7e^x$)

2. Знайдіть невизначені інтеграли:

1. $\int (2x+1)^4 dx$ (Правильна відповідь: $\frac{(2x+1)^5}{10} + C$)
2. $\int \tan(x)dx$ (Правильна відповідь: $-\ln|\cos(x)| + C$)
3. $\int \frac{dx}{1+\cos(2x)}$ (Правильна відповідь: $\frac{1}{2}\tan(x) + C$)
4. $\int 2\sin(x)\cos(x)dx$ (Правильна відповідь: $\sin^2(x) + C$ або $-\frac{1}{2}\cos(2x) + C'$)
5. $\int \cot(x)dx$ (Правильна відповідь: $\ln|\sin(x)| + C$)
6. $\int xe^{x^2}dx$ (Правильна відповідь: $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$)
7. $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$ (Правильна відповідь: $\frac{1}{2}\ln^2(x) + C$)
8. $\int \sin(2x)dx$ (Правильна відповідь: $-\frac{1}{2}\cos(2x) + C$)

3. Обчисліть визначені інтеграли:

1. $\int_0^1 xdx$ (Правильна відповідь: 0.5)
2. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ (Правильна відповідь: $\ln(2)$)
3. $\int_0^{\pi} \sin(x)dx$ (Правильна відповідь: 2)
4. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)dx$ (Правильна відповідь: 2)

5. $\int_1^e \frac{dx}{x}$ (Правильна відповідь: 1)

6. $\int_0^1 e^x dx$ (Правильна відповідь: $e - 1$)

7. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ (Правильна відповідь: $\pi/4$)

8. $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)dx$ (Правильна відповідь: 0.5)

4. Задача:

1. Визначити середнє значення об'ємної густини енергії магнітного поля апарату індуктотермії $w = w_0 \sin^2(\omega t)$ за період $T = 2\pi/\omega$.

Контрольні запитання

1. Означення первісної функції; означення невизначеного інтеграла.

2. Геометричний зміст невизначеного інтеграла.

3. Основні методи інтегрування: заміна змінної, інтегрування частинами.

4. Означення визначеного інтеграла та його геометричний зміст.

5. Властивості визначеного інтеграла.

6. Формула Ньютона-Лейбніца.

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 3

Тема: Застосування диференціальних рівнянь

Мета: навчити здобувачів свідомо використовувати апарат диференціальних рівнянь для розв'язання задач медико-біологічного профілю, описувати зв'язки між величинами та аналізувати моделі, побудовані на основі диференціальних рівнянь.

Основні поняття: диференціальне рівняння, порядок рівняння, загальний та частинний розв'язок, рівняння з розділюваними змінними, лінійні диференціальні рівняння, системи диференціальних рівнянь, моделювання медико-біологічних процесів.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Основні поняття диференціальних рівнянь

Диференціальним рівнянням називають рівняння, яке містить незалежну змінну, шукану функцію та її похідні:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок диференціального рівняння визначається найвищим порядком похідної у цьому рівнянні. Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, рівняння називається **звичайним**. Якщо від кількох — **рівнянням у частинних похідних**.

Загальним розв'язком диференціального рівняння порядку n називається функція $y = \phi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, яка містить n довільних сталих і при підстановці у рівняння перетворює його на тотожність. **Частинним розв'язком** називається функція, одержана з загального розв'язку при фіксованих значеннях сталих.

Типи диференціальних рівнянь

Рівняння з розділюваними змінними має вигляд

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

Для розв'язання цих рівнянь необхідно розділити змінні, а потім проінтегрувати.

Лінійне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Якщо $q(x) = 0$, рівняння є **однорідним**.

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Якщо $f(x) = 0$, рівняння є **однорідним**. Для його розв'язання складають **характеристичне рівняння** $k^2 + pk + q = 0$. Залежно від його коренів (k_1, k_2) загальний розв'язок має вигляд:

1. $k_1 \neq k_2$ (дійсні): $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

2. $k_1 = k_2 = k$ (дійсні): $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$.

3. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ (комплексні): $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$.

Системи диференціальних рівнянь використовуються, коли невідомих функцій більше ніж одна. На практиці часто зустрічаються системи рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Застосування диференціальних рівнянь у моделюванні

При вивченні процесів взаємодії біологічно активних речовин з організмом широко використовують фармакокінетичні моделі, побудовані з використанням диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Рівняння Юнга-Кортевега $\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ описує процес розповсюдження пульсової хвилі по аорті. Це диференціальне рівняння у частинних похідних другого порядку.

Приклад 2. Рівняння $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{r}{2R_a C_m} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{R_m C_m} V$ описує розповсюдження по нервовому волокну біопотенціалу дії V. Це також диференціальне рівняння у частинних похідних другого порядку.

Приклад 3. Математична модель динаміки запалювального процесу інфекційної етіології описується рівнянням $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \alpha n - \beta n^2$, де n - чисельність популяції патогенних мікроорганізмів, D - коефіцієнт дифузії, α - коефіцієнт швидкості розмноження, β - коефіцієнт імунної активності.

Приклад 4. Модель Роутона описує нестаціонарну дифузію кисню у шар гемоглобіну рівнянням $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{D}{s} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{k}{s} p y$, де p - парціальний тиск кисню.

Приклад 5. Розподіл частоти мутантного гену визначається розв'язком рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m u (1 - u)$, де u - частота гену.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Стік крові до периферії під час діастоли описується диференціальним рівнянням $\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{kX}$, де k - еластичність стінок судин, p - тиск крові, X - гідравлічний опір, t - час. Визначити залежність тиску від часу, якщо в момент $t = 0$ тиск дорівнює p_0. *Розв'язання.* Це рівняння з розділюваними змінними. Розділимо їх:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dt}{kX}.$$

Інтегруючи, одержимо $\ln |p| = -\frac{t}{kX} + C$. Потенціюючи, $p = e^C e^{-t/(kX)}$. З початкової умови $p(0) = p_0$ знаходимо $e^C = p_0$. Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$p(t) = p_0 e^{-t/(kX)}.$$

Задачі для самоконтролю

1. Знайдіть загальні розв'язки або інтеграли рівнянь:

1. $2xdx + 2ydy = 0$ (Правильна відповідь: $x^2 + y^2 = C$)
2. $ydx - xdy = 0$ (Правильна відповідь: $y = Cx$)
3. $dy + ydx = 0$ (Правильна відповідь: $y = Ce^{-x}$)
4. $\sin(x)dx - 2ydy = 0$ (Правильна відповідь: $y^2 = -\cos(x) + C$)

2. Знайдіть загальні інтеграли систем диференціальних рівнянь:

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$ (Правильна відповідь: $\begin{cases} x = 3C_1e^{4t} + C_2e^{-4t} \\ y = 2C_1e^{4t} - 2C_2e^{-4t} \end{cases}$)
2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$ (Правильна відповідь: $\begin{cases} x = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) \\ y = -C_1\sin(t) + C_2\cos(t) \end{cases}$)

3. Задачі:

1. Зменшення числа радіоактивних ядер N за час dt визначається законом радіоактивного розпаду: $dN = -\lambda N dt$. Знайти інтегральну форму закону.
2. При безперервному внутрішньосудинному введенні препарату зі швидкістю q зміна його кількості m у крові описується рівнянням $\frac{dm}{dt} = q - km$ (k - стала виведення). Знайти залежність $m(t)$, якщо $m(0) = 0$.

Контрольні запитання

1. Які рівняння називаються диференціальними?
2. Порядок диференціального рівняння.
3. Загальний та частинний розв'язки диференціального рівняння.
4. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
5. Лінійні диференціальні рівняння першого та другого порядку.
6. Що називають системою диференціальних рівнянь?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 4

Тема: Випадкові величини

Мета: навчити здобувачів свідомо використовувати теорію ймовірностей при вирішенні задач медико-біологічного профілю, зокрема, обчислювати ймовірності випадкових медичних подій та описувати зв'язки між випадковими величинами.

Основні поняття: випадкова подія, відносна частота, ймовірність, несумісні та сумісні події, незалежні та залежні події, теореми складання та множення ймовірностей, формула повної ймовірності, теорема Байєса, дискретна та неперервна випадкова величина, закон розподілу, ряд та многокутник розподілу.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Основні поняття теорії ймовірностей

Описом статистичних закономірностей, їх вивченням та кількісною оцінкою займається теорія ймовірностей. **Випадкова подія** — це результат спостереження, який за певних умов може відбутися або не відбутися. Характеристикою події є її **відносна частота** $W(A) = \frac{m}{n}$, де m — число реалізацій події A у серії з n випробувань. Більш точною характеристикою є **ймовірність** $P(A) = \lim_{n\to\infty} W(A)$.

Теореми теорії ймовірностей:

- **Складання ймовірностей** (несумісні події): $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- **Складання ймовірностей** (сумісні події): $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
- **Множення ймовірностей** (незалежні події): $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
- **Множення ймовірностей** (залежні події): $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$, де $P(B|A)$ — умовна ймовірність.
- **Формула повної ймовірності**: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$, де H_i — повна система гіпотез.
- **Теорема Байєса**: $P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)}$.

Випадкові величини та їх характеристики

Для кількісного опису результатів випробувань застосовують **випадкові величини**. Розрізняють:

- **дискретні** випадкові величини, які набувають лише окремих, ізольованих значень;
- **неперервні** випадкові величини, що набувають будь-які значення усередині деякого інтервалу.

Випадкова величина вважається заданою, якщо відомий її **закон розподілу** — співвідношення між можливими значеннями та відповідними їм імовірностями. Розподіл може бути задано у вигляді таблиці (**ряд розподілу**), функції розподілу або щільності розподілу.

Ряд розподілу для дискретної випадкової величини:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Умова нормування: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Графічне зображення ряду розподілу — **многокутник розподілу**.

Числові характеристики випадкової величини:

1. **Міри положення центру розподілу**:
   - *Математичне сподівання:* $M(X) = \sum x_i p_i$ (для дискретних).
   - *Медіана (Me):* значення, що ділить розподіл навпіл.
   - *Мода (Mo):* значення з найбільшою ймовірністю.
2. **Міри варіабельності**:
   - *Дисперсія:* $D(X) = M[(X - M(X))^2] = \sum (x_i - M(X))^2 p_i$.
   - *Стандартне відхилення:* $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.
   - *Коефіцієнт варіації:* $C.V. = \frac{\sigma(X)}{|M(X)|} \cdot 100\%$.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Імовірність вилікування деякого захворювання при своєчасному звертанні до лікаря дорівнює 0.7 ($P(B|A)$), а ймовірність своєчасного звертання — 0.5 ($P(A)$). Яка ймовірність успішного виходу лікування? *Розв'язок.* Події залежні. Шукаємо ймовірність сумісної появи двох подій $P(AB)$. Використовуємо теорему множення ймовірностей для залежних подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35.$$

Отже, ймовірність успішного виходу лікування становить 35%.

Задачі для самоконтролю

1. Здобувачу запропоновано тест, у якому необхідно вибрати єдину правильну відповідь з 5 варіантів. Визначити ймовірність правильного вибору відповіді непідготовленим здобувачем. (Правильна відповідь: $1/5 = 0.2$ або 20%).
2. Нехай імовірності двох деяких захворювань та дорівнюють відповідно $P(A) = 0.15$ та $P(B) = 0.05$ і, більш того, можлива наявність обох захворювань у однієї й тієї ж людини з імовірністю $P(AB) = 0.1$. Визначити ймовірність того, що у хворого одна з цих хвороб (байдуже, яка саме), тобто $P(A + B)$. *Підказка:* Події сумісні. (Правильна відповідь: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.15 + 0.05 - 0.1 = 0.1$ або 10%).

Контрольні запитання

1. Відносна частота та ймовірність випадкової події.
2. Теореми складання та множення ймовірностей.
3. Формула повної ймовірності та теорема Байєса.
4. Випадкові величини: дискретні та неперервні.
5. Ряд розподілу та многокутник розподілу.
6. Міри положення центру розподілу та міри варіабельності.

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 5

Тема: Функція розподілу ймовірностей

Мета: навчити здобувачів використовувати функцію розподілу для опису та аналізу випадкових величин, обчислювати ймовірності та знаходити числові характеристики, такі як медіана та квантилі.

Основні поняття: дискретна та неперервна випадкова величина, закон розподілу, функція розподілу, медіана, квантиль, квартиль, міжквартильний розмах.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Найбільш загальною формою задання закону розподілу є **функція розподілу** $F(x)$, яка визначає ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого за x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Функція розподілу застосовується як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

Властивості функції розподілу:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $F(x)$ є неспадною функцією, тобто якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ та $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
4. Ймовірність того, що випадкова величина потрапить в інтервал $[a, b)$, дорівнює $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Для дискретної випадкової величини, заданої рядом розподілу, функція розподілу має східчастий вигляд і обчислюється як $F(x) = \sum_{x_i<x} p_i$.

Квантиль рівня p (або p-квантиль) — це значення x_p, для якого $F(x_p) = p$.

- **Медіана (**Me**)** — це квантиль рівня 0.5, тобто $F(Me) = 0.5$.
- **Квартилі** — значення, що ділять розподіл на чотири рівні частини:
  - Перший квартиль (Q_1) — 0.25-квантиль.
  - Другий квартиль (Q_2) — медіана, 0.5-квантиль.
  - Третій квартиль (Q_3) — 0.75-квантиль.
- **Міжквартильний розмах** — це різниця $IQR = Q_3 - Q_1$.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

X	1	2	3	4	5
p	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

- **Мода:** $Mo = 3$, оскільки це значення має найбільшу ймовірність 0.4.
- **Медіана:** Знайдемо функцію розподілу: $F(1) = 0$, $F(2) = 0.1$, $F(3) = 0.1 + 0.2 = 0.3$, $F(4) = 0.3+0.4 = 0.7$. Оскільки $F(3) = 0.3 < 0.5$ та $F(4) = 0.7 > 0.5$, медіаною є значення $Me = 3$.
- **Математичне сподівання:** $M(X) = 1(0.1)+2(0.2)+3(0.4)+4(0.2)+5(0.1) = 0.1+0.4+1.2+0.8+0.5 = 3$.
- **Дисперсія:** $D(X) = (1-3)^2(0.1)+(2-3)^2(0.2)+(3-3)^2(0.4)+(4-3)^2(0.2)+(5-3)^2(0.1) = 4(0.1) + 1(0.2) + 0 + 1(0.2) + 4(0.1) = 0.4 + 0.2 + 0.2 + 0.4 = 1.2$.
- **Стандартне відхилення:** $\sigma(X) = \sqrt{1.2} \approx 1.095$.

Задачі для самоконтролю

Задача 1. Закон розподілу випадкової величини задано таблицею.

X	1	2	3	4	5
p	0.05	0.25	0.4	0.25	0.05

Знайдіть моду, медіану, математичне сподівання та дисперсію.

Контрольні запитання

1. Що таке функція розподілу та які її властивості?
2. Як знайти ймовірність влучення випадкової величини в інтервал, використовуючи функцію розподілу?
3. Що таке квантиль, квартиль, медіана?
4. Що таке міжквартильний розмах?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 6

Тема: Функція щільності розподілу

Мета: навчити здобувачів використовувати функцію щільності розподілу для опису неперервних випадкових величин, обчислювати ймовірності та числові характеристики.

Основні поняття: неперервна випадкова величина, закон розподілу, функція щільності розподілу, крива розподілу, мода, математичне сподівання, дисперсія.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Для неперервної випадкової величини закон розподілу зручно задавати за допомогою **функції щільності розподілу ймовірностей** $f(x)$, що дорівнює першій похідній від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Графік функції щільності $f(x)$ називають **кривою розподілу**. Значення неперервної випадкової величини, при якому крива розподілу має максимум, зветься **модою**.

Властивості функції щільності:

1. $f(x) \geq 0$.
2. **Умова нормування**: площа під кривою розподілу дорівнює 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Функція розподілу $F(x)$ виражається через $f(x)$ за допомогою інтеграла:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Ймовірність того, що випадкова величина потрапить в інтервал $[a, b]$, обчислюється як:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Математичне сподівання та дисперсія неперервної випадкової величини обчислюють за формулами:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Графік функції щільності розподілу відповідає півколу з центром у точці (0, 0) та радіусом R, розташованому над віссю абсцис. Чому дорівнює радіус? *Розв'язок.* З умови нормування, площа під кривою щільності має дорівнювати 1. Площа півкола $S = \frac{1}{2}\pi R^2$.

$$\frac{1}{2}\pi R^2 = 1 \implies R^2 = \frac{2}{\pi} \implies R = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Задачі для самоконтролю

1. Графік функції щільності розподілу відповідає півколу з центром у (0,0) та радіусом $R = \sqrt{2/\pi}$. Знайдіть аналітичний вираз для функції щільності розподілу $f(x)$.

2. Для розподілу з попередньої задачі знайдіть медіану, моду та математичне сподівання. (Підказка: використайте симетрію графіка).

Контрольні запитання

1. Що таке функція щільності розподілу і які її властивості?

2. Як знайти моду, математичне сподівання та дисперсію за функцією щільності?

3. Як пов'язані функція розподілу та функція щільності?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 7

Тема: Дискретні розподіли ймовірностей

Мета: ознайомити здобувачів з основними законами розподілу дискретних випадкових величин (біноміальним, Пуассона та іншими), що часто зустрічаються в медико-біологічних задачах.

Основні поняття: поліноміальний розподіл, біноміальний розподіл, негативний біноміальний розподіл, геометричний розподіл, розподіл Пуассона.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

До числа розподілів дискретної випадкової величини, що зустрічаються найчастіше у медицині та біології, належать:

- **Біноміальний розподіл:** ймовірність того, що у n незалежних випробуваннях подія з ймовірністю p відбудеться рівно m разів.

  $$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad \text{де} \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

  $M(X) = np$, $D(X) = np(1-p)$.

- **Розподіл Пуассона:** ймовірність появи m рідкісних подій за певний проміжок, якщо середня кількість таких подій дорівнює λ.

  $$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

  $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$.

- **Геометричний розподіл:** ймовірність того, що перший успіх (з ймовірністю p) відбудеться у n-му випробуванні.

  $$P(n) = (1-p)^{n-1} p.$$

  $M(X) = 1/p$, $D(X) = (1-p)/p^2$.

- **Негативний біноміальний розподіл:** ймовірність того, що для отримання m успіхів знадобиться рівно n випробувань.

  $$P(n) = C_{n-1}^{m-1} p^m (1-p)^{n-m}.$$

  $M(X) = m/p$, $D(X) = m(1-p)/p^2$.

- **Поліноміальний розподіл:** узагальнення біноміального, коли у випробуванні можливі k наслідків з ймовірностями $p_1, \ldots, p_k$. Ймовірність того, що у n випробуваннях i-й наслідок трапиться m_i разів ($\sum m_i = n$):

  $$P(m_1, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!} p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}.$$

  $M(X_i) = np_i$, $D(X_i) = np_i(1-p_i)$.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Поява колонії мікроорганізмів даного виду в певних умовах оцінюється ймовірністю $p = 0.7$. В експерименті у 6 пробах виявили 4 колонії. Визначити ймовірність цієї події.
Розв'язок. Використовуємо біноміальний розподіл при $n = 6, m = 4, p = 0.7$:

$$P_6(4) = C_6^4(0.7)^4(1-0.7)^{6-4} = \frac{6!}{4!2!}(0.7)^4(0.3)^2 = 15 \cdot (0.2401) \cdot (0.09) \approx 0.324.$$

Ймовірність цієї події становить близько 32.4%.

Приклад 2. Деяке захворювання зустрічається у 10% популяції ($p = 0.1$). Визначити ймовірність того, що 3-ій випадок захворювання ($m = 3$) буде виявлений при огляді 5-ого обстежуваного ($n = 5$). *Розв'язок.* Використовуємо негативний біноміальний розподіл.

$$P(5) = C_{5-1}^{3-1}(0.1)^3(1-0.1)^{5-3} = C_4^2(0.1)^3(0.9)^2 = 6 \cdot (0.001) \cdot (0.81) = 0.00486.$$

Ймовірність цієї події становить близько 0.5%.

Задачі для самоконтролю

1. Поява колонії мікроорганізмів даного виду в певних умовах оцінюється ймовірністю $p = 0.4$. В експерименті у 4 пробах виявили 2 колонії. Визначити ймовірність цієї події.

Контрольні запитання

1. У яких випадках застосовується біноміальний розподіл, а в яких — розподіл Пуассона?
2. Коли біноміальний розподіл можна наблизити розподілом Пуассона?
3. Чим відрізняється геометричний розподіл від негативного біноміального?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 8

Тема: Неперервні розподіли ймовірностей

Мета: ознайомити здобувачів з основними законами розподілу неперервних випадкових величин (рівномірним, експонентним, нормальним), що широко використовуються для моделювання медико-біологічних даних.

Основні поняття: рівномірний розподіл, експонентний розподіл, нормальний розподіл, стандартизований нормальний розподіл.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

До числа розподілів неперервної випадкової величини, що зустрічаються найчастіше, відносяться:

- **Рівномірний розподіл** на відрізку $[a, b]$: щільність ймовірності стала на цьому відрізку і дорівнює нулю поза ним.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

  $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

- **Експонентний (показниковий) розподіл** з параметром $\lambda > 0$: описує час до настання деякої події (напр., час безвідмовної роботи приладу).

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

  $M(X) = 1/\lambda$, $D(X) = 1/\lambda^2$.

- **Нормальний розподіл** з параметрами μ (мат. сподівання) і σ^2 (дисперсія), $N(\mu, \sigma^2)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

  Крива розподілу симетрична відносно $x = \mu$. Якщо $\mu = 0$ і $\sigma = 1$, розподіл називається **стандартизованим нормальним розподілом** $N(0, 1)$.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Вважається, що вакцина формує імунітет проти поліомієліту у 99.99% випадків. Припустимо, що вакцинувалось 10000 чоловік. Яке очікуване число людей, що не набули імунітету? Яка ймовірність того, що імунітет не набули 3 людини? *Розв'язок.* Ймовірність не набути імунітет $p = 1 - 0.9999 = 0.0001$. Оскільки p дуже мала, а $n = 10000$ велике, використовуємо наближення розподілом Пуассона. Очікуване число (інтенсивність): $\lambda = np = 10000 \cdot 0.0001 = 1$.

Отже, в середньому очікується, що одна людина не набуде імунітету. Ймовірність того, що імунітет не набули рівно 3 людини ($m = 3$):

$$P_3 = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \frac{1^3}{3!}e^{-1} = \frac{1}{6}e^{-1} \approx \frac{0.3678}{6} \approx 0.0613.$$

Ймовірність цієї події становить близько 6.13%.

Контрольні запитання

1. Які процеси описує експонентний розподіл? Наведіть приклади.
2. Які основні властивості нормального розподілу?
3. Що таке стандартизований нормальний розподіл і для чого він використовується?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 9

Тема: Розподіли статистик вибірки

Мета: ознайомити здобувачів з розподілами, яким підпорядковуються вибіркові статистики (хі-квадрат, Стьюдента, Фішера-Снедекора), що є основою для побудови довірчих інтервалів та перевірки гіпотез.

Основні поняття: розподіл хі-квадрат (χ^2), розподіл Стьюдента (t-розподіл), розподіл Фішера-Снедекора (F-розподіл), ступені свободи.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Розподіли, що використовуються у статистиці

- **Розподіл χ^2 (хі-квадрат):** Якщо $Z_1, \ldots, Z_\nu$ — незалежні випадкові величини зі стандартним нормальним розподілом $N(0,1)$, то сума їх квадратів $Y = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2$ підпорядковується χ^2-розподілу з ν ступенями свободи. $M(Y) = \nu$, $D(Y) = 2\nu$. Цей розподіл використовується для аналізу вибіркових дисперсій та у критеріях узгодженості.
- **Розподіл Стьюдента (t-розподіл):** Якщо $Z \sim N(0,1)$ та $Y \sim \chi^2(\nu)$ є незалежними, то величина $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$ підпорядковується t-розподілу з ν ступенями свободи. $M(T) = 0$ (при $\nu > 1$), $D(T) = \frac{\nu}{\nu-2}$ (при $\nu > 2$). Використовується для оцінки математичного сподівання при невідомій дисперсії. При $\nu \to \infty$ t-розподіл прямує до нормального.
- **Розподіл Фішера-Снедекора (F-розподіл):** Якщо $Y_1 \sim \chi^2(\nu_1)$ та $Y_2 \sim \chi^2(\nu_2)$ є незалежними, то відношення $F = \frac{Y_1/\nu_1}{Y_2/\nu_2}$ підпорядковується F-розподілу з (ν_1, ν_2) ступенями свободи. Використовується для порівняння дисперсій двох вибірок.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Дев'ять вимірювань концентрації розчину у відсотках дали такі результати: 1.27; 1.29; 1.20; 1.19; 1.33; 1.09; 1.31; 1.24; 1.21. Визначити довірчий інтервал для середньої концентрації розчину при надійності 90%.

Розв'язок.

1. **Обсяг вибірки:** $n = 9$.
2. **Вибіркове середнє:** $\bar{x} = \frac{1}{9}(1.27 + \cdots + 1.21) = \frac{11.13}{9} \approx 1.237$.
3. **Вибіркове стандартне відхилення:** $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \frac{0.0408}{8} = 0.0051$. $s = \sqrt{0.0051} \approx 0.0714$.
4. **Параметри довірчого інтервалу:** Надійність 90% означає рівень значущості $\alpha = 1 - 0.90 = 0.1$. Для двостороннього інтервалу використовуємо $\alpha/2 = 0.05$.
5. **Ступені свободи:** $\nu = n - 1 = 9 - 1 = 8$.

6. **Критичне значення t-статистики:** З таблиці розподілу Стьюдента для $\nu = 8$ та $\alpha/2 = 0.05$ знаходимо $t_{0.05,8} = 1.860$.

7. **Обчислення довірчого інтервалу:** Формула: $\bar{x} \pm t_{\alpha/2,\nu} \frac{s}{\sqrt{n}}$.

$$1.237 \pm 1.860 \cdot \frac{0.0714}{\sqrt{9}} = 1.237 \pm 1.860 \cdot \frac{0.0714}{3} \approx 1.237 \pm 0.0443.$$

   Довірчий інтервал: $(1.1927, 1.2813)$.

Відповідь: З надійністю 90% можна стверджувати, що істинна середня концентрація розчину знаходиться в інтервалі [1.19; 1.28].

Задачі для самоконтролю

1. Випадкова величина підпорядковується розподілу Стьюдента з 10 ступенями свободи. Які математичне сподівання та дисперсія цієї випадкової величини?

2. Випадкова величина підпорядковується χ^2-розподілу з 10 ступенями свободи. Які математичне сподівання та дисперсія цієї випадкової величини?

Контрольні запитання

1. Що таке ступені свободи?

2. Для чого використовується розподіл Стьюдента?

3. Коли застосовується F-розподіл?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 10

Тема: Варіаційні ряди

Мета: навчити здобувачів методам первинної обробки та візуалізації статистичних даних за допомогою варіаційних рядів, полігонів, гістограм та кумулятивних кривих.

Основні поняття: дискретний варіаційний ряд, інтервальний варіаційний ряд, емпірична функція розподілу, огіва (кумулятивна крива), емпірична функція щільності розподілу, гістограма, полігон.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Необроблена вибірка даних містить приховану інформацію. Перший крок аналізу — це впорядкування та візуалізація даних.

- **Варіаційний ряд** — упорядковане за зростанням розташування значень вибірки.
- Для дискретних даних будують **дискретний варіаційний ряд**, де кожному значенню ставиться у відповідність його **частота** (кількість появ). Графічне зображення — **полігон частот** (ламана лінія, що з'єднує точки (x_i, p_i)).
- Для неперервних даних будують **інтервальний варіаційний ряд**, розбиваючи діапазон значень на класи (інтервали) і підраховуючи частоту для кожного класу. Графічне зображення — **гістограма** (стовпчикова діаграма).
- **Емпірична функція розподілу** $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де n_x — кількість спостережень, менших за x, а n — загальний обсяг вибірки.
- **Огіва (кумулятивна крива)** — графік емпіричної функції розподілу (накопичених частот).

Побудова гістограми:

1. Визначити розмах $R = x_{max} - x_{min}$.
2. Визначити кількість класів k, наприклад, за формулою Стерджеса: $k \approx 1 + 3.322 \lg(n)$.
3. Визначити ширину класу $h \approx R/k$.
4. Побудувати інтервали та підрахувати частоти m_i для кожного.
5. Побудувати прямокутники з основами h та висотами, пропорційними частотам (зазвичай m_i або відносним частотам m_i/n). Площа гістограми має бути пропорційною обсягу вибірки.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Згруповані дані про кількість квіток лікарської рослини на одному пагоні утворюють варіаційний ряд:

кількість квіток	1	2	3	4	5	6	7	8
частота	0	1	3	6	4	3	2	1

Побудувати полігон відносних частот та огиву.

Розв'язок. Загальна кількість спостережень $n = 0+1+3+6+4+3+2+1 = 20$. Розраховуємо відносні та накопичені відносні частоти.

Кількість квіток (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Частота (m_i)	0	1	3	6	4	3	2	1
Відносна частота (m_i/n)	0.00	0.05	0.15	0.30	0.20	0.15	0.10	0.05
Накопичена част. ($F^*(x_i)$)	0.00	0.05	0.20	0.50	0.70	0.85	0.95	1.00

За даними з рядків "Кількість квіток"та "Відносна частота"будується полігон. За даними з рядків "Кількість квіток"та "Накопичена част."будується огіва.

Контрольні запитання

1. Чим відрізняється гістограма від полігону і коли їх застосовують?
2. Що показує огіва (кумулятивна крива)?
3. Як вибрати кількість інтервалів для гістограми?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 11

Тема: Оцінювання параметрів розподілу

Мета: навчити здобувачів методам оцінювання невідомих параметрів генеральної сукупності на основі вибіркових даних, зокрема методам точкового та інтервального оцінювання.

Основні поняття: генеральна сукупність, вибірка, репрезентативність, точкова оцінка, інтервальна оцінка, довірчий інтервал, надійна ймовірність.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Генеральна сукупність — сукупність всіх можливих значень випадкової величини. **Вибірка** — частина генеральної сукупності, яка має бути **репрезентативною** (представницькою). Задача вибіркового методу — по вибірці зробити правильну оцінку параметрів генеральної сукупності.

- **Точкове оцінювання** — оцінка параметра у вигляді одиничного значення. Наприклад:
  - вибіркове середнє $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ як оцінка математичного сподівання μ.
  - вибіркова дисперсія $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$ як незміщена оцінка дисперсії σ^2.
- **Інтервальне оцінювання** — оцінка параметра у вигляді інтервалу, який з заданою ймовірністю накриває його істинне значення.
  - **Довірчий інтервал** — інтервал значень, що накриває параметр.
  - **Надійна ймовірність** $(1-\alpha)$ — ймовірність, з якою довірчий інтервал накриває істинне значення. α — рівень значущості.

Довірчий інтервал для математичного сподівання (при невідомій дисперсії та нормальному розподілі):

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$

де $t_{\alpha/2,n-1}$ — квантиль розподілу Стьюдента з $n-1$ ступенями свободи.

Довірчий інтервал для дисперсії (при нормальному розподілі):

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right),$$

де χ^2 — квантилі розподілу хі-квадрат з $n-1$ ступенями свободи.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Тривалість захворювання (у днях) у 20 випадках пневмонії склала: 10, 11, 6, 16, 7, 13, 15, 8, 9, 10, 11, 13, 7, 8, 13, 15, 16, 13, 14, 15. Знайти інтервальні оцінки математичного сподівання та дисперсії для 95% надійної ймовірності. *Розв'язок.*

1. **Точкові оцінки:** $n = 20$. Обчислюємо $\bar{x} = \frac{239}{20} = 11.95$ днів. Вибіркова дисперсія $s^2 = \frac{1}{19}\sum(x_i - 11.95)^2 \approx 10.79$, звідки стандартне відхилення $s \approx 3.28$.

2. **Довірчий інтервал для μ:** Надійність 95% $\implies \alpha = 0.05 \implies \alpha/2 = 0.025$. Ступені свободи $\nu = n - 1 = 19$. З таблиці розподілу Стьюдента, $t_{0.025,19} = 2.093$. Інтервал: $11.95 \pm 2.093 \cdot \frac{3.28}{\sqrt{20}} \approx 11.95 \pm 1.54 \Rightarrow (10.41, 13.49)$.

3. **Довірчий інтервал для σ^2:** З таблиці розподілу χ^2 для $\nu = 19$: $\chi^2_{1-\alpha/2,19} = \chi^2_{0.975,19} \approx 8.91$. $\chi^2_{\alpha/2,19} = \chi^2_{0.025,19} \approx 32.85$. Нижня межа: $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,19}} = \frac{19 \cdot 10.79}{32.85} \approx 6.24$. Верхня межа: $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,19}} = \frac{19 \cdot 10.79}{8.91} \approx 23.01$. Інтервал для дисперсії: $(6.24, 23.01)$.

Контрольні запитання

1. Що таке точкова та інтервальна оцінки? Наведіть приклади.
2. Від чого залежить ширина довірчого інтервалу для середнього значення?
3. Як побудувати довірчий інтервал для середнього значення, якщо дисперсія невідома?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 12

Тема: Перевірка гіпотез

Мета: навчити здобувачів основам статистичної перевірки гіпотез, включаючи формулювання гіпотез, вибір критерію, визначення критичної області та прийняття рішень на основі вибіркових даних.

Основні поняття: статистична гіпотеза, нульова та альтернативна гіпотези, критерій перевірки, критична область, помилка першого та другого роду, рівень значущості, потужність критерію.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Статистична гіпотеза — це припущення щодо властивостей генеральної сукупності.

- **Нульова гіпотеза (H_0)** — припущення, що перевіряється (зазвичай про відсутність ефекту, різниці, зв'язку).
- **Альтернативна гіпотеза (H_1)** — припущення, що приймається, якщо H_0 відхиляється.

Перевірка гіпотези здійснюється за допомогою **статистичного критерію** (статистики). Множина значень критерію ділиться на **область прийняття** H_0 та **критичну область** (де H_0 відхиляється).

Можливі помилки:

- **Помилка першого роду:** відхилити H_0, коли вона істинна. Ймовірність цієї помилки — **рівень значущості** α.
- **Помилка другого роду:** прийняти H_0, коли вона хибна. Ймовірність цієї помилки — β.

Потужність критерію — це $1 - \beta$ (ймовірність правильно відхилити хибну H_0).

Приклад: перевірка гіпотези про рівність середніх двох незалежних вибірок (дисперсії невідомі, але вважаються рівними): $H_0 : \mu_x = \mu_y$. Критерій Стьюдента:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}, \quad \text{де} \quad s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}.$$

Ця статистика має t-розподіл з $n_x + n_y - 2$ ступенями свободи. Якщо обчислене значення $|t|$ більше за критичне t_{crit} (з таблиці для рівня значущості α), то H_0 відхиляється.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Одержані дані про вміст вітаміну С в томатах (мг/100г): 26, 22, 21, 19, 20, 23, 13, 27, 22, 23, 22. Перевірити, чи є значення 13 "промахом"(викидом) на рівні значущості $\alpha = 0.01$.

Розв'язок.

1. **Формулювання гіпотез:** H_0: вибірка однорідна (значення 13 не є викидом). H_1: вибірка неоднорідна (значення 13 є викидом).

2. **Впорядкування даних:** $n = 11$. Варіаційний ряд: 13, 19, 20, 21, 22, 22, 22, 23, 23, 26, 27.

3. **Вибір критерію:** Для перевірки крайніх значень на промах у малих вибірках використовуємо критерій Діксона. Для $n = 11$ і перевірки найменшого значення ($x_1 = 13$) формула має вигляд:
$$Q = \frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$$

4. **Обчислення критерію:** $x_1 = 13$, $x_2 = 19$, $x_{n-1} = x_{10} = 26$.
$$Q_{calc} = \frac{19 - 13}{26 - 13} = \frac{6}{13} \approx 0.462.$$

5. **Визначення критичного значення:** З таблиці критичних значень критерію Діксона для $n = 11$ та рівня значущості $\alpha = 0.01$ знаходимо $Q_{crit} \approx 0.546$.

6. **Прийняття рішення:** Порівнюємо обчислене значення з критичним: $0.462 < 0.546$.

7. **Висновок:** Оскільки $Q_{calc} < Q_{crit}$, нульова гіпотеза не відхиляється. Немає достатніх підстав вважати значення 13 мг/100г промахом на рівні значущості 0.01.

Задачі для самоконтролю

1. На фармацевтичній фабриці перевіряють систематичне зниження проти норми концентрації одного з компонентів. Норма 100%. 10 проб дали середнє 98% та $s = 0.5\%$. Чи є зниження значущим при надійності 95% ($\alpha = 0.05$)?

Контрольні запитання

1. Що таке нульова та альтернативна гіпотези?
2. Чим відрізняються помилки першого та другого роду?
3. Що таке рівень значущості та потужність критерію?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.

4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.

2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 13

Тема: Кореляційний аналіз

Мета: навчити здобувачів вимірювати та аналізувати статистичний зв'язок між двома випадковими величинами за допомогою коефіцієнта кореляції.

Основні поняття: кореляційна залежність, кореляційний аналіз, коваріація, коефіцієнт кореляції Пірсона.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Кореляційна залежність — це статистичний зв'язок між випадковими величинами, при якому зміна однієї величини призводить до зміни середнього значення іншої. **Коваріація** — міра спільної мінливості двох величин:

$$\mathrm{cov}(X, Y) = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Вибіркова оцінка: $s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$.

Коефіцієнт кореляції Пірсона — це стандартизована коваріація, що вимірює силу та напрямок лінійного зв'язку:

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Вибіркова оцінка (коефіцієнт кореляції r):

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}.$$

Властивості коефіцієнта кореляції:

- $-1 \le r_{xy} \le 1$.
- Якщо $|r_{xy}| \approx 1$, це вказує на сильний лінійний зв'язок.
- Якщо $r_{xy} \approx 0$, це вказує на відсутність лінійного зв'язку (але можливий нелінійний).
- Знак r_{xy} вказує на напрямок зв'язку (прямий, якщо $r > 0$; обернений, якщо $r < 0$).

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. При обстеженні 11 пацієнтів одержані дані про зріст H (см) та об'єм циркулюючої крові V (л). Визначити вибіркову оцінку коефіцієнта кореляції.

H	170	169	175	150	175	155	180	160	185	175	165
V	4.8	5.1	4.0	5.3	4.1	5.3	4.8	4.3	5.2	5.2	4.7

Розв'язок.

1. **Обчислюємо вибіркові середні:** $\bar{H} \approx 169.0$ см, $\bar{V} = 4.8$ л.
2. **Обчислюємо стандартні відхилення:** $s_H \approx 10.7$ см, $s_V \approx 0.48$ л.
3. **Обчислюємо вибіркову коваріацію:** $s_{HV} = \frac{1}{10} \sum (H_i - 169)(V_i - 4.8) \approx -3.34$.
4. **Обчислюємо коефіцієнт кореляції:**

$$r_{HV} = \frac{s_{HV}}{s_H s_V} = \frac{-3.34}{10.7 \cdot 0.48} \approx -0.65.$$

Висновок: Існує помірний обернений лінійний зв'язок між зростом та об'ємом циркулюючої крові у даній вибірці.

Контрольні запитання

1. Що таке кореляційна залежність?
2. Які властивості має коефіцієнт кореляції Пірсона?
3. Що означає, якщо коефіцієнт кореляції дорівнює нулю? А якщо дорівнює -1?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Практичне заняття № 14

Тема: Регресійний та дисперсійний аналіз

Мета: навчити здобувачів застосовувати методи регресійного аналізу для моделювання залежностей між ознаками та методи дисперсійного аналізу для перевірки гіпотез про вплив факторів на досліджувану величину.

Основні поняття: регресійний аналіз, рівняння регресії, коефіцієнт регресії, метод найменших квадратів, дисперсійний аналіз (ANOVA), факторні ознаки, модель дисперсійного аналізу, міжгрупова та внутрішньогрупова мінливість.

Зміст навчального матеріалу з даної теми

Регресійний аналіз

Предметом регресійного аналізу є моделювання залежності результативної ознаки Y від однієї або кількох факторних ознак X. Модель простої лінійної регресії:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i,$$

де β_0 і β_1 — коефіцієнти регресії, ε_i — випадкова похибка. Оцінки коефіцієнтів b_0 і b_1 знаходять **методом найменших квадратів (МНК)**, мінімізуючи суму квадратів залишкових відхилень $\sum(y_i - \hat{y}_i)^2$. Рівняння вибіркової регресії: $\hat{y} = b_0 + b_1 x$. Оцінки коефіцієнтів:

$$b_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}, \quad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}.$$

Після регресійного аналізу, який моделює зв'язок, часто застосовують дисперсійний аналіз для перевірки значущості цього зв'язку або впливу інших факторів.

Приклад 1 (регресійний аналіз). У дослідженні оцінюють зв'язок між індексом маси тіла X (кг/м^2) та систолічним артеріальним тиском Y (мм рт. ст.). Отримано дані для 6 пацієнтів:

$$(20; 110),\ (22; 115),\ (25; 120),\ (27; 128),\ (30; 135),\ (32; 140).$$

Побудувати рівняння простої лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ методом найменших квадратів та зробити висновок щодо наявності лінійної залежності ($\alpha = 0.05$).

Розв'язок.

1. **Вихідні характеристики.** Обсяг вибірки $n = 6$.

$$\bar{x} = \frac{20 + 22 + 25 + 27 + 30 + 32}{6} = 26, \qquad \bar{y} = \frac{110 + 115 + 120 + 128 + 135 + 140}{6} = \frac{374}{3} \approx 124.67.$$

2. **Обчислення коефіцієнта нахилу b_1.**

$$S_{xy} = \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 268, \qquad S_{xx} = \sum(x_i - \bar{x})^2 = 106.$$

Тоді

$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{268}{106} = \frac{134}{53} \approx 2.53.$$

3. **Обчислення вільного члена b_0.**

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = \frac{374}{3} - \frac{134}{53} \cdot 26 = \frac{9370}{159} \approx 58.93.$$

4. **Рівняння вибіркової регресії та інтерпретація.**

$$\boxed{\hat{y} = 58.93 + 2.53x}.$$

Інтерпретація: при збільшенні X на 1 кг/м^2 очікуване значення Y (у середньому) зростає приблизно на 2.53 мм рт. ст.

5. **Оцінка якості апроксимації (коефіцієнт детермінації).**

$$SS_{\text{tot}} = \sum(y_i - \bar{y})^2 \approx 683.33, \qquad SS_{\text{res}} = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 \approx 5.75,$$

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{\text{res}}}{SS_{\text{tot}}} \approx 1 - \frac{5.75}{683.33} \approx 0.992.$$

Отже, лінійна модель пояснює близько 99.2% варіації Y.

6. **Перевірка значущості нахилу b_1 ($\alpha = 0.05$).** Гіпотези: $H_0 : \beta_1 = 0$, $H_1 : \beta_1 \neq 0$.

$$s^2 = \frac{SS_{\text{res}}}{n-2} = \frac{5.75}{4} = 1.4375, \qquad \text{se}(b_1) = \sqrt{\frac{s^2}{S_{xx}}} = \sqrt{\frac{1.4375}{106}} \approx 0.116.$$

$$t = \frac{b_1}{\text{se}(b_1)} \approx \frac{2.53}{0.116} \approx 21.7, \qquad \nu = n - 2 = 4.$$

Критичне значення (двобічна перевірка) $t_{\text{crit}} \approx 2.776$. Оскільки $21.7 > 2.776$, відхиляємо H_0.

Висновок: між індексом маси тіла та систолічним артеріальним тиском у наведених даних наявний статистично значущий лінійний зв'язок; рівняння $\hat{y} = 58.93 + 2.53x$ дає високу якість апроксимації ($R^2 \approx 0.992$).

Дисперсійний аналіз (ANOVA)

Дисперсійний аналіз — метод для перевірки гіпотез про рівність середніх значень у кількох групах (сукупностях). Він аналізує мінливість (дисперсію) даних. Основна ідея: загальна мінливість (сума квадратів відхилень, SS_{total}) розкладається на:

- **Міжгрупову мінливість (SS_A)**: зумовлена дією фактора (різницею між групами).
- **Внутрішньогрупову (залишкову) мінливість (SS_W)**: зумовлена випадковими коливаннями всередині груп.

$$SS_{total} = SS_A + SS_W.$$

Далі обчислюють середні квадрати (дисперсії): $MS_A = \frac{SS_A}{I-1}$ та $MS_W = \frac{SS_W}{n-I}$, де I — кількість груп, n — загальний обсяг вибірки. Для перевірки $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_I$ використовується F-критерій:

$$F = \frac{MS_A}{MS_W}.$$

Якщо обчислене значення F більше за критичне F_{crit} (з таблиці F-розподілу для рівні значущості α та ступенів свободи $\nu_1 = I - 1, \nu_2 = n - I$), нульова гіпотеза відхиляється.

Завдання для самостійної підготовки

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 (ANOVA). В результаті вимірювання частоти пульсу людини у нормальних умовах та при підвищених прискореннях одержані такі дані:

- Група 1 (Норма, 1g): 76, 73, 68, 83
- Група 2 (1.5g): 71, 62, 55, 68
- Група 3 (2g): 46, 59, 54

Чи свідчать ці дані про наявність залежності між частотою пульсу та прискоренням ($\alpha = 0.05$)?

Розв'язок.

1. **Гіпотези:** $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ (прискорення не впливає на середню частоту пульсу). H_1: не всі середні рівні.
2. **Обчислення середніх:** Кількість груп $I = 3$. Обсяги вибірок: $n_1 = 4, n_2 = 4, n_3 = 3$. Загальний обсяг $n = 11$. Середні по групах: $\bar{y}_1 = 75$, $\bar{y}_2 = 64$, $\bar{y}_3 = 53$. Загальне середнє: $\bar{y} = (4 \cdot 75 + 4 \cdot 64 + 3 \cdot 53)/11 = (300 + 256 + 159)/11 = 715/11 = 65$.
3. **Обчислення сум квадратів:** Міжгрупова мінливість: $SS_A = n_1(\bar{y}_1 - \bar{y})^2 + n_2(\bar{y}_2 - \bar{y})^2 + n_3(\bar{y}_3 - \bar{y})^2 = 4(75-65)^2 + 4(64-65)^2 + 3(53-65)^2 = 4(100) + 4(1) + 3(144) = 400 + 4 + 432 = 836$. Внутрішньогрупова мінливість: $SS_W = \sum(y_{1j} - 75)^2 + \sum(y_{2j} - 64)^2 + \sum(y_{3j} - 53)^2 = [(1)^2 + (-2)^2 + (-7)^2 + (8)^2] + [(7)^2 + (-2)^2 + (-9)^2 + (4)^2] + [(-7)^2 + (6)^2 + (1)^2] = [118] + [150] + [86] = 354$.
4. **Обчислення середніх квадратів:** Ступені свободи: $\nu_1 = I - 1 = 2$; $\nu_2 = n - I = 11 - 3 = 8$. $MS_A = SS_A/\nu_1 = 836/2 = 418$. $MS_W = SS_W/\nu_2 = 354/8 = 44.25$.
5. **Обчислення F-критерію:** $F = MS_A/MS_W = 418/44.25 \approx 9.45$.
6. **Прийняття рішення:** Критичне значення для $\alpha = 0.05$ та ступенів свободи (2, 8) з таблиці F-розподілу: $F_{crit} = 4.46$. Оскільки $9.45 > 4.46$, відхиляємо H_0.

Висновок: Існує статистично значуща залежність між частотою пульсу та прискоренням.

Контрольні запитання

1. Що таке рівняння регресії і для чого воно використовується?
2. У чому полягає метод найменших квадратів?
3. Яку гіпотезу перевіряє дисперсійний аналіз?
4. Що таке міжгрупова та внутрішньогрупова мінливість в ANOVA?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.