МІНІСТЕРСТВО ОХОРОНИ ЗДОРОВ'Я УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ МЕДИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет: Фармацевтичний
Кафедра фізіології та біофізики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з науково-педагогічної роботи

____

Едуард БУРЯЧКІВСЬКИЙ
02 вересня 2024 року

МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗДОБУВАЧА З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

«ВИЩА МАТЕМАТИКА»

Рівень вищої освіти: другий (магістерський)

Галузь знань: 22 «Охорона здоров'я»

Спеціальність: 226 «Фармація, промислова фармація»

Освітньо-професійна програма: Фармація

Одеса – 2024

Затверджено:

Засіданням кафедри фізіології та біофізики
Одеського національного медичного університету

Протокол № 1 від 26 серпня 2024 року

Завідувач кафедри ______________________ Леонід Годлевський

Розробники:

завідуючий кафедри, д.мед.н., проф. Годлевський Л.С.
доцент кафедри, к.ф.-м.н., Жуматій П.Г.
завуч кафедри, магістр, ст.викл. Марченко С.В.

Самостійна робота № 1

Тема: Диференціальне числення. Похідна та диференціал функції однієї змінної. Дослідження функцій за допомогою похідної.

Мета: Сформувати вміння коректно використовувати означення похідної та диференціала; застосовувати правила диференціювання для елементарних і складених функцій; виконувати якісне дослідження функцій (монотонність, критичні точки, локальні екстремуми); інтерпретувати похідну як локальну характеристику зміни величини в задачах медико-біологічного змісту.

Основні поняття: похідна в точці; границя відношення приростів; механічний і геометричний зміст похідної; таблиця похідних; правила диференціювання (сума, добуток, частка, ланцюгове правило); критичні точки; зростання і спадання; локальний максимум і мінімум; диференціал; лінійна апроксимація; похідна як відношення диференціалів; диференціали вищих порядків.

Теоретичні питання

1. Дайте означення похідної функції в точці через границю відношення приросту функції до приросту аргументу.
2. Сформулюйте умову існування похідної та поясніть, чому існування похідної є сильнішою вимогою, ніж існування границі функції в точці.
3. Поясніть механічний зміст похідної для прямолінійного руху (шлях як функція часу).
4. Поясніть геометричний зміст похідної як характеристику дотичної до графіка функції.
5. Наведіть (словесно) базові правила диференціювання: для суми/різниці, добутку, частки.
6. Сформулюйте ланцюгове правило для складеної функції та поясніть його роль у диференціюванні композицій.
7. Поясніть, що таке критична точка функції та чому критичні точки є кандидатами на точки локальних екстремумів.
8. Сформулюйте ознаку зростання/спадання функції через знак похідної на інтервалі.
9. Поясніть критерій локального максимуму/мінімуму через зміну знака похідної в околі критичної точки.
10. Дайте означення диференціала функції в точці як головної лінійної частини приросту функції.
11. Поясніть зміст лінійної апроксимації функції в околі точки та її межі застосовності.
12. Розкрийте зміст твердження «диференціал незалежної змінної» та стандартного ототожнення приросту аргументу з його диференціалом у лінійній моделі.
13. Поясніть, як інтерпретується запис похідної як відношення диференціалів, і які припущення за цим стоять.
14. Поясніть, що називають диференціалами вищих порядків і в яких задачах вони з'являються (якісно).
15. Опишіть типові помилки при диференціюванні (зокрема для частки та складеної функції) і як їх уникати.

Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняється приріст функції від диференціала функції?
2. Які умови гарантують, що локальна лінійна модель є адекватною в околі точки?

3. Чи може функція мати похідну в точці, але не мати похідної в жодному околі цієї точки? Поясніть відповідь.
4. Чому умова $f'(x) = 0$ є необхідною для локального екстремуму (внутрішня точка), але не є достатньою?
5. Як за знаками похідної на проміжках встановити інтервали монотонності без побудови графіка?
6. Як перевірити, що знайдена критична точка не є точкою екстремуму (за зміною знака похідної)?
7. У яких ситуаціях похідна в критичній точці може не існувати, але екстремум все одно є?
8. Які класи елементарних функцій найчастіше потребують ланцюгового правила?
9. Назвіть типові похідні для степеневих, показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій (без виведення).
10. Як коректно диференціювати добуток двох функцій, якщо одна з них є складеною?
11. Чому при роботі з логарифмами важливо контролювати область визначення?
12. Який зміст має похідна у задачі «чутливості» вихідної величини до малих змін параметра?
13. Як інтерпретувати диференціал як оцінку абсолютної похибки вимірювання?
14. Які обмеження має використання диференціала для «великих» змін аргументу?
15. Які кроки є мінімально необхідними для коректного дослідження функції на екстремуми?

Задачі для самостійного розв'язання

1. **(Диференціал об'єму)** Об'єм кулеподібної клітини задається формулою $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Нехай радіус збільшився від $r_1 = 8.0 \cdot 10^{-6}$ м до $r_2 = 8.08 \cdot 10^{-6}$ м.
   (а) Знайдіть диференціал dV та оцініть зміну об'єму при переході $r_1 \to r_2$ через dV.
   (б) Запишіть точну зміну $\Delta V = V(r_2) - V(r_1)$ (без обчислювальних спрощень) і вкажіть, який з двох виразів є лінійною апроксимацією.
2. **(Чутливість показника)** Показник гучності (умовна шкала) задано залежністю $E(I) = k \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$, де $k = 12$, $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2. Нехай інтенсивність змінилася з $I_1 = 4.0 \cdot 10^{-8}$ Вт/м^2 до $I_2 = 4.4 \cdot 10^{-8}$ Вт/м^2.
   (а) Знайдіть похідну $E'(I)$ та диференціал dE.
   (б) Оцініть зміну E при зміні $I_1 \to I_2$ за допомогою диференціала (з явною підстановкою $I = I_1$ та $dI = I_2 - I_1$).
3. **(Екстремум та інтервали монотонності)** Розгляньте функцію $f(x) = x^2 \ln x - 3x$, визначену для $x > 0$.
   (а) Знайдіть $f'(x)$ та розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$.
   (б) Визначте інтервали зростання/спадання функції та зробіть висновок про наявність/відсутність локальних екстремумів.
   (в) Для знайденої(их) критичної(их) точки(ок) вкажіть тип (локальний максимум, локальний мінімум або відсутність екстремуму) за зміною знака похідної.

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I:*

Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів). — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 2

Тема: Невизначений інтеграл. Визначений інтеграл. Формула Ньютона–Лейбніца. Середнє значення функції.

Мета: Сформувати вміння знаходити первісні та обчислювати невизначені інтеграли; застосовувати метод заміни змінної й інтегрування частинами; обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона–Лейбніца; знаходити середнє значення функції на відрізку та інтерпретувати визначений інтеграл як міру сумарного ефекту у задачах медико-біологічного змісту.

Основні поняття: первісна; невизначений інтеграл; стала інтегрування; таблиця базових інтегралів; лінійність інтегрування; метод заміни змінної; інтегрування частинами; визначений інтеграл; геометричний зміст визначеного інтеграла; формула Ньютона–Лейбніца; властивості визначеного інтеграла; середнє значення функції; узагальнення інтеграла (криволінійні та кратні інтеграли – оглядово).

Теоретичні питання

1. Дайте означення первісної для функції та поясніть, у чому полягає неоднозначність первісної.
2. Сформулюйте означення невизначеного інтеграла та поясніть роль сталої інтегрування.
3. Поясніть геометричний зміст сім'ї первісних як множини графіків, що відрізняються вертикальним зсувом.
4. Сформулюйте лінійність невизначеного інтеграла та поясніть, які перетворення підінтегрального виразу вона дозволяє.
5. Наведіть (словесно) базові табличні інтеграли для степеневих, показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій.
6. Опишіть логіку методу заміни змінної: коли він застосовний і які кроки є обов'язковими.
7. Опишіть логіку інтегрування частинами та поясніть, як вибирають функції u та dv.
8. Дайте означення визначеного інтеграла та поясніть, що він вимірює як числова характеристика на відрізку.
9. Поясніть геометричний зміст визначеного інтеграла як площі (з урахуванням знака) під графіком на відрізку.
10. Сформулюйте формулу Ньютона–Лейбніца та поясніть її зв'язок із первісною.
11. Перелічіть основні властивості визначеного інтеграла (лінійність, зміна меж, адитивність за проміжком) і поясніть їх зміст.
12. Поясніть, що таке середнє значення функції на відрізку та як воно обчислюється через визначений інтеграл.
13. Які вимоги до функції на відрізку гарантують коректність застосування формули Ньютона–Лейбніца (якісно, без доведення)?
14. Поясніть, у чому різниця між обчисленням невизначеного інтеграла та визначеного інтеграла.
15. Поясніть (оглядово) ідею узагальнення визначеного інтеграла на криві, поверхні та об'єми.

Питання для самоконтролю

1. Чому первісна визначається з точністю до додавання сталої?
2. Як перевірити правильність знайденої первісної?
3. Які типові форми підінтегральних виразів «підказують» заміну змінної?

4. Які типові помилки трапляються при заміні змінної (зокрема в диференціалі та межах інтегрування)?
5. Які типові помилки трапляються при інтегруванні частинами?
6. Як змінюється визначений інтеграл при перестановці меж інтегрування?
7. Чому $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ незалежно від вигляду f?
8. Як користуватися адитивністю інтеграла при розбитті відрізка на частини?
9. У чому полягає «знаковий» характер площі, що задається визначеним інтегралом?
10. Як інтерпретувати визначений інтеграл як сумарний ефект, якщо підінтегральна функція є швидкістю зміни або інтенсивністю процесу?
11. Чим середнє значення функції на відрізку відрізняється від середнього арифметичного значень у кількох точках?
12. У яких задачах природно з'являється інтегрування по часу, а в яких — по просторовій координаті?
13. Які мінімальні кроки потрібні, щоб коректно застосувати формулу Ньютона–Лейбніца?
14. Як співвідносяться обчислення первісної та обчислення площі під графіком?
15. Які ознаки вказують, що задачу доцільно зводити до табличного інтеграла?

Задачі для самостійного розв'язання

1. **(Заміна змінної; «доза–час»)** Швидкість надходження препарату в системний кровообіг (умовні одиниці за годину) описано функцією $r(t) = 0.8\,t\,e^{-0.5t^2}$, де $t \geq 0$ — час у годинах. Знайдіть сумарну кількість препарату, що надійшла за проміжок часу $t \in [0; 4]$:
$$Q = \int_0^4 r(t)\,dt.$$
(Використайте заміну змінної, що робить інтеграл табличним.)
2. **(Інтегрування частинами; момент навантаження)** Нехай функція інтенсивності навантаження під час тесту (умовні одиниці) має вигляд $p(t) = (2t+1)\,e^t$ на проміжку $t \in [0; 1]$. Обчисліть сумарний індекс навантаження
$$P = \int_0^1 (2t+1)\,e^t\,dt.$$
(Розв'яжіть задачу, застосувавши інтегрування частинами для відповідного доданка.)
3. **(Середнє значення функції)** Об'ємна густина енергії (умовні одиниці) у магнітному полі апарату індуктотермії задана залежністю $w(t) = w_0 \sin^2(\omega t)$, де $\omega > 0$. Знайдіть середнє значення $\bar{w}$ на одному періоді $T = \frac{2\pi}{\omega}$:
$$\bar{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)\,dt.$$
(У відповіді залиште результат через w_0.)

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.

2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 3

Тема: Застосування диференціальних рівнянь у моделюванні медико-біологічних процесів.

Мета: Сформувати вміння розпізнавати типи диференціальних рівнянь, коректно задавати початкові умови та інтерпретувати параметри моделі; знаходити загальні та частинні розв'язки найпростіших звичайних диференціальних рівнянь; аналізувати поведінку розв'язку (зростання/спадання, асимптотичні режими, стаціонарні значення) у прикладних задачах медико-біологічного профілю; розуміти зміст систем диференціальних рівнянь як моделей взаємодіючих процесів.

Основні поняття: диференціальне рівняння; порядок; звичайне диференціальне рівняння та рівняння у частинних похідних; загальний і частинний розв'язок; інтегральна крива; початкова умова; рівняння з розділюваними змінними; лінійне рівняння першого порядку; однорідне та неоднорідне рівняння; лінійне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (оглядово); характеристичне рівняння; система диференціальних рівнянь; параметри моделі; стаціонарний стан; стійкість (якісно).

Теоретичні питання

1. Дайте означення диференціального рівняння та поясніть, які об'єкти воно містить (незалежна змінна, шукані функції, похідні).
2. Поясніть, що називають порядком диференціального рівняння та як його визначають.
3. Поясніть різницю між звичайним диференціальним рівнянням та рівнянням у частинних похідних (за кількістю незалежних змінних).
4. Дайте означення загального розв'язку рівняння порядку n та поясніть роль n довільних сталих.
5. Поясніть, що таке частинний розв'язок і як він визначається з загального розв'язку за початковими/крайовими умовами.
6. Поясніть зміст початкової задачі: чому без початкових умов модель зазвичай не задає конкретної траєкторії процесу.
7. Опишіть структуру рівнянь з розділюваними змінними та логіку їх розв'язання.
8. Дайте означення лінійного диференціального рівняння першого порядку та поясніть, у чому полягає його «лінійність».
9. Поясніть відмінність однорідного та неоднорідного лінійного рівняння першого порядку.
10. Поясніть (якісно) структуру лінійного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами та роль характеристичного рівняння.
11. Опишіть, як за коренями характеристичного рівняння визначається вигляд загального розв'язку (дійсні різні, кратні, комплексно-спряжені).
12. Поясніть, що називають системою диференціальних рівнянь та чому системи виникають у моделях з кількома взаємодіючими змінними.
13. Поясніть, що означає «параметр моделі» та як його фізичний/біологічний зміст впливає на поведінку розв'язку.
14. Поясніть поняття стаціонарного стану (рівноважного значення) та як його знаходять з рівняння.
15. Поясніть (якісно) ідею стійкості стаціонарного стану: що означає повернення/неповернення до рівноваги після малого збурення.

Питання для самоконтролю

1. Як за виглядом рівняння швидко встановити його порядок і чи є воно звичайним або у частинних похідних?
2. Чому для рівняння першого порядку зазвичай достатньо однієї початкової умови, а для другого порядку — двох?
3. Які типові помилки трапляються при розділенні змінних (зокрема під час перенесення множників і запису диференціалів)?
4. Як перевірити правильність знайденого розв'язку підстановкою у вихідне рівняння?
5. Чому у розв'язках експоненційного типу важливий знак коефіцієнта в показнику?
6. Як за розв'язком вигляду $y(t) = y_0 e^{-t/\tau}$ інтерпретувати параметр τ як характерний час процесу?
7. У чому різниця між загальним розв'язком і розв'язком конкретної задачі з початковими умовами?
8. Як з лінійного рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ отримати рівняння для відхилення від стаціонарного стану, якщо стаціонарний стан існує?
9. Що означає «стала виведення» або «коефіцієнт елімінації» у найпростішій фармакокінетичній моделі?
10. Які ознаки вказують, що систему рівнянь можна звести до одного рівняння більшого порядку (якісно)?
11. Чому в системах другого порядку часто з'являються коливальні режими, і що означають синуси та косинуси у розв'язку?
12. Які параметри у моделі визначають швидкість зростання/спаду популяції або концентрації?
13. Як інтерпретувати член виду $-\beta n^2$ у рівняннях для популяцій як наслідок самогальмування/обмеженості ресурсів?
14. Чому в рівняннях дифузії принципово з'являється друга похідна за координатою?
15. Які дані (типово) потрібно знати, щоб параметри моделі були визначені однозначно?

Задачі для самостійного розв'язання

1. **(Розділювані змінні; спад тиску)** Тиск крові під час діастоли описано рівнянням

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{kX},$$

   де $k > 0$ — еластичність стінок судин, $X > 0$ — гідравлічний опір, t — час.
   (а) Знайдіть загальний розв'язок $p(t)$.
   (б) Знайдіть частинний розв'язок за початковою умовою $p(0) = p_0$.
   (в) Вкажіть, як залежить характерний час спаду від параметрів k та X (якісно, без числових підстановок).
2. **(Закон радіоактивного розпаду)** Зменшення числа ядер $N(t)$ описується рівнянням

$$dN = -\lambda N\, dt, \quad \lambda > 0.$$

   (а) Запишіть рівняння у вигляді похідної $\frac{dN}{dt}$ та знайдіть загальний розв'язок.
   (б) Знайдіть частинний розв'язок за умовою $N(0) = N_0$.
   (в) Поясніть, як змінюється $N(t)$ при збільшенні λ (якісно).
3. **(Найпростіша фармакокінетика при інфузії)** При безперервному введенні препарату зі сталою швидкістю q зміна його кількості $m(t)$ у крові описується рівнянням

$$\frac{dm}{dt} = q - km, \quad k > 0,$$

за початкової умови $m(0) = 0$.

(а) Знайдіть розв'язок $m(t)$.

(б) Знайдіть стаціонарне значення m_* (рівноважний рівень) і покажіть, що $m(t) \to m_*$ при $t \to \infty$.

(в) Запишіть розв'язок для відхилення $\Delta m(t) = m_* - m(t)$ та опишіть характер спаду $\Delta m(t)$ (якісно).

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 4

Тема: Випадкові величини. Ймовірність подій. Дискретні та неперервні розподіли. Числові характеристики розподілу.

Мета: Закріпити базові поняття теорії ймовірностей (випадкова подія, відносна частота, ймовірність); навчитися застосовувати теореми складання та множення ймовірностей, формулу повної ймовірності й теорему Байєса; сформувати навички роботи з дискретними та неперервними випадковими величинами, їх законами розподілу та числовими характеристиками (математичне сподівання, дисперсія, стандартне відхилення); інтерпретувати результат у задачах медико-біологічного профілю.

Основні поняття: випадкова подія; відносна частота; ймовірність; несумісні та сумісні події; незалежні та залежні події; умовна ймовірність; теореми складання й множення ймовірностей; формула повної ймовірності; теорема Байєса; випадкова величина; дискретна та неперервна випадкова величина; закон розподілу; ряд розподілу; многокутник розподілу; функція розподілу; щільність розподілу; математичне сподівання; дисперсія; стандартне відхилення; медіана; мода; коефіцієнт варіації.

Теоретичні питання

1. Дайте означення випадкової події та поясніть, чому вона характеризується не «наслідком», а мірою можливості настання.
2. Поясніть зміст відносної частоти $W(A) = \frac{m}{n}$ та її відмінність від ймовірності.
3. Дайте означення ймовірності як границі відносної частоти та поясніть роль великої кількості випробувань.
4. Поясніть різницю між несумісними та сумісними подіями. Наведіть формули для $P(A + B)$ в обох випадках.
5. Дайте означення незалежності подій та сформулюйте теорему множення ймовірностей для незалежних подій.
6. Дайте означення умовної ймовірності $P(B|A)$ та сформулюйте теорему множення для залежних подій.
7. Сформулюйте формулу повної ймовірності та поясніть, що називають повною системою гіпотез.
8. Сформулюйте теорему Байєса та поясніть, як вона переоцінює ймовірності гіпотез після отримання події-ознаки.
9. Дайте означення випадкової величини та поясніть, чим вона відрізняється від випадкової події.
10. Поясніть різницю між дискретною та неперервною випадковою величиною.
11. Поясніть, що означає «закон розподілу» і в яких формах він може бути заданий (таблиця, функція розподілу, щільність).
12. Запишіть умову нормування для дискретного розподілу та поясніть її зміст.
13. Поясніть, що таке ряд розподілу та многокутник розподілу, і яку інформацію вони несуть.
14. Дайте означення математичного сподівання для дискретної випадкової величини та поясніть його як «середній рівень» за великої кількості реалізацій.
15. Дайте означення дисперсії та стандартного відхилення і поясніть їх роль як мір варіабельності.

Питання для самоконтролю

1. Чому відносна частота є випадковою величиною, а ймовірність — ні (у класичній постановці)?
2. У яких випадках можна безпосередньо застосувати $P(AB) = P(A)P(B)$, а коли необхідно використовувати $P(AB) = P(A)P(B|A)$?
3. Як перевірити незалежність подій за їхніми ймовірностями?
4. Як змінюється формула $P(A + B)$, якщо події є сумісними?
5. Навіщо у формулі Байєса потрібен знаменник $P(A)$ і як його обчислюють на практиці?
6. Чому для неперервної величини ймовірність «точного значення» дорівнює нулю?
7. Як з таблиці дискретного розподілу обчислити $M(X)$ і $D(X)$?
8. Чому дисперсія вимірюється в «квадраті одиниць», а стандартне відхилення — в тих самих одиницях, що й X?
9. За якою ознакою мода, медіана та математичне сподівання можуть не збігатися?
10. Який зміст має коефіцієнт варіації і чому його коректно використовувати лише за ненульового $M(X)$?
11. Як інтерпретувати $P(B|A)$ у задачі діагностики або тестування?
12. Чому теорема Байєса без попередніх ймовірностей $P(H_i)$ не дає коректної оцінки?
13. Як змінюється «апостеріорна» ймовірність гіпотези при збільшенні точності тесту (якісно)?
14. Які типові помилки трапляються при підстановці чисел у формулу Байєса?
15. У яких задачах медико-біологічного профілю природно описувати результат як випадкову величину, а не як подію?

Задачі для самостійного розв'язання

1. **(Теореми складання для сумісних подій)** Імовірність захворювання A дорівнює $P(A) = 0.12$, імовірність захворювання B дорівнює $P(B) = 0.08$, а імовірність одночасної наявності обох захворювань — $P(AB) = 0.03$. Знайдіть імовірність того, що в пацієнта є хоча б одне з цих захворювань, тобто $P(A + B)$.
2. **(Формула повної ймовірності та Байєс)** Нехай захворювання H у популяції трапляється з імовірністю $P(H) = 0.02$. Діагностичний тест має чутливість $P(T^+|H) = 0.95$ та специфічність $P(T^-|\overline{H}) = 0.90$.
   (а) Знайдіть $P(T^+)$ за формулою повної ймовірності.
   (б) Знайдіть імовірність наявності захворювання за позитивного тесту $P(H|T^+)$ за теоремою Байєса.
3. **(Дискретна випадкова величина; числові характеристики)** Випадкова величина X — кількість позитивних результатів у серії з трьох незалежних проб, має розподіл:

X	0	1	2	3
p	0.20	0.50	0.25	0.05

   (а) Перевірте умову нормування $\sum p_i = 1$.
   (б) Обчисліть математичне сподівання $M(X)$.
   (в) Обчисліть дисперсію $D(X)$ та стандартне відхилення $\sigma(X)$.
   (г) Вкажіть моду розподілу.

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 5

Тема: Функція розподілу ймовірностей. Квантилі, медіана, квартилі. Міжквартильний розмах.

Мета: Закріпити поняття функції розподілу $F(x)$ як універсального способу задання закону розподілу; навчитися обчислювати ймовірності потрапляння випадкової величини в інтервал через різницю значень F; сформувати навички побудови функції розподілу для дискретної випадкової величини та інтерпретації її як східчастої функції; навчитися знаходити медіану та квантилі (зокрема квартилі) за функцією розподілу; обчислювати міжквартильний розмах як міру варіабельності.

Основні поняття: дискретна та неперервна випадкова величина; закон розподілу; функція розподілу $F(x)$; властивості $F(x)$; ймовірність потрапляння в інтервал через F; квантиль рівня p; медіана; квартилі Q_1, Q_2, Q_3; міжквартильний розмах IQR; інтерпретація «центрального» інтервалу за квартилями.

Теоретичні питання

1. Дайте означення функції розподілу $F(x)$ та поясніть, чому вона є найбільш загальною формою задання закону розподілу.
2. Перелічіть основні властивості $F(x)$ (обмеженість, неспадність, граничні значення при $x \to \pm\infty$).
3. Поясніть, як обчислюють $P(a \le X < b)$ за допомогою $F(x)$ і чому виникає різниця $F(b) - F(a)$.
4. Опишіть вигляд $F(x)$ для дискретної випадкової величини та поясніть, чому вона є східчастою.
5. Опишіть зв'язок між $F(x)$ та рядом розподілу $\{(x_i, p_i)\}$ у дискретному випадку.
6. Дайте означення квантиля рівня p та поясніть його інтерпретацію як «порогового» значення розподілу.
7. Дайте означення медіани як 0.5-квантиля та поясніть її зміст як точки, що ділить розподіл на дві рівні за ймовірністю частини.
8. Дайте означення квартилів Q_1, Q_2, Q_3 та поясніть їх інтерпретацію.
9. Поясніть, що таке міжквартильний розмах $IQR = Q_3 - Q_1$ та чому це міра варіабельності, стійка до крайніх значень.
10. Поясніть, як за Q_1 та Q_3 задається «центральний» інтервал, що містить 50% маси розподілу.
11. Поясніть відмінність між «знайти квантиль за F» та «знайти F за законом розподілу».
12. Які труднощі виникають при визначенні квантиля в дискретному розподілі та як їх коректно узгоджують (якісно)?

Питання для самоконтролю

1. Як перевірити, що запропонована функція може бути функцією розподілу (які обов'язкові ознаки)?
2. Чому $F(x)$ не може спадати?
3. Чому $0 \le F(x) \le 1$ для всіх x?
4. Чому для дискретного розподілу $F(x)$ має розриви (стрибки)?
5. Як пов'язаний розмір стрибка $F(x)$ у точці x_i з імовірністю $P(X = x_i)$?
6. Як обчислити $P(X \ge a)$ через $F(x)$ (якісно, без доведення)?
7. Як знайти медіану у дискретному розподілі за таблицею ймовірностей?

8. Як знайти Q_1 та Q_3 у дискретному розподілі за накопиченими ймовірностями?
9. Чим відрізняється мода від медіани з точки зору визначень?
10. Чому IQR часто застосовують разом з медіаною як «робастний» опис розподілу?
11. Як інтерпретувати випадок, коли медіана не є єдиним значенням (допустимий інтервал медіан)?
12. Які типові помилки трапляються при обчисленні $P(a \le X < b)$ через $F(b) - F(a)$?
13. Як поводиться $F(x)$ при $x \to -\infty$ та при $x \to +\infty$ і чому це важливо?
14. Чому не можна плутати $F(x) = P(X < x)$ і $P(X = x)$?
15. Які величини (медіана, квартилі, IQR) є характеристиками положення, а які — варіабельності?

Задачі для самостійного розв'язання

1. **(Побудова $F(x)$ для дискретної величини; ймовірність інтервалу)** Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу:

X	0	1	2	3	4
p	0.10	0.20	0.35	0.25	0.10

   (а) Побудуйте функцію розподілу $F(x) = P(X < x)$ у вигляді кусочно-заданої східчастої функції.
   (б) Знайдіть $P(1 \le X < 4)$ через $F(x)$.

2. **(Квантилі, медіана, квартилі)** Дискретна випадкова величина Y має розподіл:

Y	1	2	3	5
p	0.30	0.25	0.35	0.10

   (а) Побудуйте $F_Y(y) = P(Y < y)$.
   (б) Знайдіть медіану Me (0.5-квантиль).
   (в) Знайдіть квартилі Q_1 та Q_3.
   (г) Обчисліть міжквартильний розмах IQR.

3. **(Знаходження ймовірностей за заданою $F(x)$)** Функція розподілу випадкової величини Z задана:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ 0.20, & 0 < z \le 1, \\ 0.65, & 1 < z \le 3, \\ 1, & z > 3. \end{cases}$$

   (а) Знайдіть $P(Z < 1)$, $P(Z < 3)$.
   (б) Знайдіть $P(0 \le Z < 3)$.
   (в) Знайдіть медіану Me та квартилі Q_1, Q_3.

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.

3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 6

Тема: Функція щільності розподілу. Неперервні випадкові величини. Ймовірності та числові характеристики за щільністю.

Мета: Закріпити поняття неперервної випадкової величини та способи задання її закону розподілу через функцію щільності $f(x)$; навчитися використовувати умову нормування та обчислювати ймовірності потрапляння в інтервали як інтеграли від щільності; сформувати навички переходу між функцією розподілу $F(x)$ та щільністю $f(x)$; обчислювати числові характеристики неперервної випадкової величини (моду, математичне сподівання, дисперсію) та інтерпретувати їх у задачах медико-біологічного профілю.

Основні поняття: неперервна випадкова величина; закон розподілу; функція розподілу $F(x)$; функція щільності розподілу $f(x)$; крива розподілу; умова нормування; ймовірність інтервалу як інтеграл; мода; математичне сподівання; дисперсія; стандартне відхилення (як похідна характеристика).

Теоретичні питання

1. Поясніть, чому для неперервної випадкової величини зручно задавати закон розподілу через щільність $f(x)$, а не через таблицю значень.
2. Дайте означення щільності розподілу $f(x)$ як похідної від функції розподілу $F(x)$ та поясніть зміст співвідношення $f(x) = F'(x)$.
3. Сформулюйте та поясніть властивості щільності: невід'ємність $f(x) \geq 0$ та умову нормування $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.
4. Поясніть геометричний зміст умови нормування як площі під кривою розподілу.
5. Запишіть зв'язок між $F(x)$ та $f(x)$ у вигляді інтеграла $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ та поясніть його зміст.
6. Поясніть, чому для неперервної величини ймовірність точного значення дорівнює нулю, і чому коректно працювати з інтервалами.
7. Запишіть формулу для $P(a \leq X \leq b)$ через щільність та поясніть, чому інтеграл відповідає ймовірності.
8. Дайте означення моди як точки максимуму $f(x)$ (за наявності максимуму) і поясніть її інтерпретацію.
9. Запишіть формулу математичного сподівання $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$ та поясніть його зміст як «центру мас» кривої щільності.
10. Запишіть формулу дисперсії через центральний момент $D(X) = \int (x-M(X))^2 f(x)\,dx$ та еквівалентну формулу через $M(X)$ і $\int x^2 f(x)\,dx$.
11. Поясніть, чому дисперсія характеризує розсіювання значень навколо $M(X)$.
12. Опишіть роль симетрії щільності відносно точки $x = a$ для визначення $M(X)$ та медіани (якісно).
13. Поясніть, як перевіряють, що задана функція може бути щільністю (ознаки та перевірки).
14. Поясніть, як з відомої $f(x)$ побудувати $F(x)$ і як з відомої $F(x)$ отримати $f(x)$.
15. Поясніть, у чому відмінність між «кривою розподілу» та «функцією розподілу» (за змістом і графічно).

Питання для самоконтролю

1. Які дві умови є обов'язковими для щільності $f(x)$?
2. Чому інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ інтерпретується як ймовірність, а не як «значення функції»?

3. Чому $F(x)$ є неспадною функцією, якщо $f(x) \geq 0$?
4. Як знайти $P(X > b)$ через $F(b)$ (якісно)?
5. Як знайти $P(a < X < b)$ через $F(a)$ та $F(b)$ (якісно)?
6. У чому типова помилка при застосуванні умови нормування для частково-заданих $f(x)$?
7. Як за графіком щільності визначити моду?
8. Який зміст має симетрія щільності відносно нуля для математичного сподівання?
9. Чому дисперсія має «квадратні» одиниці, а стандартне відхилення має ті самі одиниці, що й X?
10. Як перевірити правильність знайденого $F(x)$: які граничні значення та властивості мають виконуватися?
11. Чому для неперервної величини $P(X = a) = 0$ не суперечить наявності щільності в точці a?
12. Чому максимум щільності не обов'язково збігається з математичним сподіванням (якісно)?
13. Які умови забезпечують скінченність $M(X)$ та $D(X)$ (якісно)?
14. Як інтерпретувати «площу під кривою» на підінтервалі як частку реалізацій у цьому інтервалі?
15. Які дані (формально) достатні, щоб вважати неперервну випадкову величину заданою?

Задачі для самостійного розв'язання

1. **(Півколо як крива щільності; аналітичний вираз)** Нехай щільність $f(x)$ задана верхньою півокружністю радіуса R з центром у точці $(0, 0)$, розташованою над віссю Ox.
   (а) Використовуючи умову нормування, знайдіть R.
   (б) Запишіть аналітичний вираз $f(x)$ у вигляді кусочно-заданої функції на $\mathbb{R}$.
   (в) Перевірте (формально), що $f(x) \geq 0$ та $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.
2. **(Ймовірності за щільністю)** Неперервна випадкова величина X має щільність

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2), & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

   (а) Знайдіть сталий множник c з умови нормування.
   (б) Обчисліть $P(0 \leq X \leq 1)$.
   (в) Обчисліть $P(|X| \leq 1/2)$.
3. **(Числові характеристики за щільністю)** Неперервна випадкова величина Y має щільність

$$f(y) = \begin{cases} ky, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

   (а) Знайдіть k з умови нормування.
   (б) Знайдіть математичне сподівання $M(Y)$.
   (в) Знайдіть дисперсію $D(Y)$.
   (г) Знайдіть моду Mo (за означенням максимуму щільності на носії розподілу).

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 7

Тема: Дискретні розподіли ймовірностей: біноміальний, геометричний, негативний біноміальний, Пуассона, поліноміальний.

Мета: Засвоїти умови застосовності основних дискретних розподілів у задачах медико-біологічного профілю; навчитися обирати адекватний закон розподілу для моделі (біноміальний, геометричний, негативний біноміальний, Пуассона, поліноміальний) та інтерпретувати його параметри; сформувати навички обчислення ймовірностей за відповідними формулами; закріпити знання про математичне сподівання та дисперсію для кожного із законів.

Основні поняття: дискретна випадкова величина; розподіл Бернуллі; серія незалежних випробувань; біноміальний розподіл; геометричний розподіл; негативний біноміальний розподіл; розподіл Пуассона; поліноміальний (мультиноміальний) розподіл; параметри n, p, m, λ; комбінаторні коефіцієнти C_n^m; математичне сподівання; дисперсія.

Теоретичні питання

1. Поясніть, які умови необхідні для застосування схеми незалежних випробувань Бернуллі (незалежність, сталість p, два наслідки).
2. Дайте означення біноміального розподілу як розподілу числа успіхів у n незалежних випробуваннях з імовірністю успіху p.
3. Запишіть функцію ймовірностей біноміального розподілу

   $$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

   та поясніть зміст кожного множника.
4. Наведіть формули математичного сподівання та дисперсії біноміального розподілу та поясніть їх інтерпретацію.
5. Дайте означення геометричного розподілу як розподілу номера випробування, на якому вперше настає успіх.
6. Запишіть функцію ймовірностей геометричного розподілу

   $$P(N = n) = (1-p)^{n-1} p,$$

   та поясніть, чому показник дорівнює $n - 1$.
7. Поясніть відмінність між геометричним розподілом і негативним біноміальним (перший успіх проти m-го успіху).
8. Дайте означення негативного біноміального розподілу як розподілу числа випробувань n, потрібних для отримання рівно m успіхів.
9. Запишіть функцію ймовірностей негативного біноміального розподілу

   $$P(N = n) = C_{n-1}^{m-1} p^m (1-p)^{n-m},$$

   та поясніть комбінаторний множник C_{n-1}^{m-1}.
10. Наведіть формули $M(N)$ та $D(N)$ для геометричного й негативного біноміального розподілів та поясніть, як змінюються ці характеристики при зміні p.
11. Дайте означення розподілу Пуассона як моделі числа рідкісних подій за фіксований інтервал за відомого середнього числа подій λ.
12. Запишіть формулу Пуассона

    $$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

    та поясніть роль параметра λ.

13. Поясніть, чому для розподілу Пуассона математичне сподівання і дисперсія однакові та дорівнюють λ.
14. Поясніть, за яких умов біноміальний розподіл наближається розподілом Пуассона (якісно: велике n, мале p за фіксованого $\lambda = np$).
15. Дайте означення поліноміального розподілу як узагальнення біноміального для k можливих наслідків з імовірностями $p_1, \ldots, p_k$.
16. Запишіть формулу поліноміального розподілу

$$P(m_1, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdots m_k!} p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}, \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i = n,$$

та поясніть зміст обмеження $\sum m_i = n$.
17. Поясніть, у чому полягає модельний зміст параметрів n, p, λ у медико-біологічних інтерпретаціях.
18. Поясніть, чому некоректний вибір розподілу призводить до систематичних помилок у висновках (якісно).

Питання для самоконтролю

1. Який розподіл обирають, якщо цікавить число успіхів у фіксованій кількості випробувань?
2. Який розподіл обирають, якщо цікавить номер випробування, на якому відбувся перший успіх?
3. Який розподіл обирають, якщо цікавить кількість випробувань до m-го успіху?
4. Який розподіл доцільний для моделювання числа «рідкісних» подій за фіксований час/площу/об'єм?
5. Як перевірити, що для біноміальної моделі припущення про сталість p є прийнятним?
6. Які параметри входять у формулу біноміального розподілу і що вони означають?
7. Що означає параметр λ у розподілі Пуассона і як його інтерпретувати?
8. Чому умова $\lambda = np$ є принциповою при пуассонівському наближенні біноміального розподілу?
9. Чим відрізняється випадкова величина «кількість подій» від «часу/номера до події» у контексті вибору моделі?
10. Чому для геометричного розподілу очікувана кількість випробувань зменшується при зростанні p?
11. У чому полягає комбінаторний зміст коефіцієнта C_n^m?
12. Які величини є математичним сподіванням і дисперсією для біноміального розподілу?
13. Які величини є математичним сподіванням і дисперсією для розподілу Пуассона?
14. Яка принципова різниця між двома ситуаціями: «у n пробах знайти m позитивних» і «досягти m позитивних, рахуючи кількість проб»?
15. Наведіть приклад задачі, де природним є поліноміальний розподіл (кілька категорій результату).

Задачі для самостійного розв'язання

1. **(Біноміальний розподіл)** Імовірність позитивного результату лабораторної проби дорівнює $p = 0.30$. Проведено $n = 8$ незалежних проб. Знайдіть імовірність того, що позитивний результат буде отримано рівно $m = 3$ рази.

2. **(Розподіл Пуассона)** Середня кількість випадків певної рідкісної події за одиницю часу дорівнює $\lambda = 2.5$. Знайдіть імовірність того, що за цей інтервал відбудеться рівно $m = 4$ події.
3. **(Геометричний розподіл)** Імовірність успішного виявлення потрібного зразка в одній пробі дорівнює $p = 0.20$. Проби є незалежними. Знайдіть імовірність того, що перший успіх настане у $n = 5$-й пробі.

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 8

Тема: Неперервні розподіли ймовірностей: рівномірний, експонентний, нормальний (у тому числі стандартизований).

Мета: Засвоїти базові неперервні закони розподілу, що застосовуються для моделювання медико-біологічних даних; навчитися розпізнавати ситуації, у яких доцільні рівномірний, експонентний або нормальний розподіли; закріпити вміння працювати з функцією щільності $f(x)$ та функцією розподілу $F(x)$; навчитися обчислювати ймовірності потрапляння у проміжок та знаходити числові характеристики (математичне сподівання, дисперсію) для типових неперервних моделей; опанувати стандартне нормування та інтерпретацію z-оцінок у нормальному розподілі.

Основні поняття: неперервна випадкова величина; щільність розподілу $f(x)$; функція розподілу $F(x)$; рівномірний розподіл $U(a, b)$; експонентний розподіл $\mathrm{Exp}(\lambda)$; параметр інтенсивності λ; нормальний розподіл $N(\mu, \sigma^2)$; стандартизований нормальний розподіл $N(0, 1)$; стандартне нормування $Z = (X - \mu)/\sigma$; симетрія нормальної кривої; правило інтервалів; квантиль.

Теоретичні питання

1. Поясніть, що означає неперервність випадкової величини та чому для неперервного розподілу виконується $P(X = x) = 0$ для будь-якого фіксованого x.
2. Дайте означення функції щільності $f(x)$ та функції розподілу $F(x)$ і запишіть їх зв'язок:
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$
3. Сформулюйте умови, яким має задовольняти щільність $f(x)$ (невід'ємність, нормування):
$$f(x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$
4. Запишіть формулу для ймовірності потрапляння у проміжок через щільність:
$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$
та поясніть її зміст.
5. Дайте означення рівномірного розподілу на $[a, b]$ та запишіть його щільність:
$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ для } x \in [a, b], \qquad f(x) = 0 \text{ поза } [a, b].$$
6. Поясніть, чому для рівномірного розподілу всі підінтервали однакової довжини мають однакові ймовірності.
7. Запишіть формули математичного сподівання і дисперсії рівномірного розподілу:
$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$
та поясніть їх інтерпретацію.
8. Дайте означення експонентного розподілу $\mathrm{Exp}(\lambda)$ та запишіть його щільність:
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ для } x \geq 0, \qquad f(x) = 0 \text{ для } x < 0.$$

9. Запишіть функцію розподілу експонентного закону:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ для } x \geq 0,$$

та поясніть, як із неї отримують ймовірність $P(X > t)$.
10. Наведіть формули математичного сподівання та дисперсії експонентного розподілу:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad D(X) = \frac{1}{\lambda^2},$$

та поясніть роль параметра λ.
11. Поясніть модельний зміст експонентного закону як моделі «часу до події» (якісно: концентрація ймовірності біля малих часів при великих λ).
12. Дайте означення нормального розподілу $N(\mu, \sigma^2)$ та запишіть його щільність:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

13. Поясніть геометричні властивості нормальної кривої: симетрія відносно $x = \mu$, наявність єдиного максимуму, вплив σ на «ширину» кривої.
14. Поясніть сенс параметрів μ та σ (центрування і масштаб) у медико-біологічних інтерпретаціях.
15. Дайте означення стандартизованого нормального розподілу та запишіть перехід до нього:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, \qquad Z \sim N(0, 1).$$

16. Поясніть, як за допомогою стандартизації зводять обчислення ймовірностей для $N(\mu, \sigma^2)$ до табличних значень для $N(0, 1)$.
17. Запишіть загальну формулу для ймовірності проміжку у нормальному законі через стандартизацію:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right).$$

18. Поясніть, у чому полягає різниця між «вибором моделі розподілу» та «підстановкою чисел у формулу» (якісно: припущення визначають коректність висновку).

Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняються $f(x)$ і $F(x)$ та як перейти від однієї до іншої?
2. Яка ймовірність потрапляння у проміжок через $F(x)$?

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

3. Коли доцільно використовувати рівномірний розподіл і який його ключовий змістовий критерій?
4. Чому експонентний розподіл природний для моделювання «часу очікування до події»?
5. Яку роль відіграє параметр λ в експонентному законі?
6. Які параметри визначають нормальний розподіл і як вони впливають на форму щільності?
7. Що означає стандартизація та навіщо вводять змінну Z?
8. Які обчислювальні задачі найчастіше розв'язують для неперервних розподілів (проміжок, хвіст, квантиль)?

9. Чому для неперервної величини немає сенсу говорити про $P(X = x)$ як про «ненульову ймовірність»?
10. У чому різниця між «ймовірністю на інтервалі» та «значенням щільності в точці»?
11. Як якісно перевірити, чи може нормальний розподіл бути адекватним для даних (симетрія, одновершинність)?
12. Який розподіл з наведених є симетричним, а які — ні?
13. Як за графіком щільності відрізнити рівномірний закон від нормального?
14. Як зміниться форма нормальної кривої при збільшенні σ?
15. Як зміниться форма експонентної кривої при збільшенні λ?

Задачі для самостійного розв'язання

1. **(Рівномірний розподіл)** Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[a, b]$, де $a = 2$, $b = 8$. Знайдіть:
   (а) ймовірність $P(3 \le X \le 5)$;
   (б) математичне сподівання $M(X)$;
   (в) дисперсію $D(X)$.
2. **(Експонентний розподіл)** Час очікування події T має експонентний розподіл з параметром $\lambda = 0.4$. Знайдіть:
   (а) ймовірність $P(T \le 5)$;
   (б) ймовірність $P(T > 3)$;
   (в) математичне сподівання $M(T)$ та дисперсію $D(T)$.
3. **(Нормальний розподіл і стандартизація)** Нехай $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, де $\mu = 70$, $\sigma = 10$. Знайдіть стандартизовані межі (тобто відповідні z-значення) для подій:
   (а) $X \le 85$;
   (б) $60 \le X \le 90$;
   (в) $X \ge 50$.
   (У відповідях подайте значення меж у вигляді чисел $z = (x - \mu)/\sigma$; обчислення самих ймовірностей не є обов'язковим, якщо таблиця $N(0, 1)$ не використовується.)

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина І: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 9

Тема: Розподіли статистик вибірки: χ^2-, t- та F-розподіли. Ступені свободи. Довірчі інтервали та перевірка гіпотез.

Мета: Сформувати чітке розуміння, які розподіли мають базові вибіркові статистики у класичній математичній статистиці; навчитися пов'язувати нормальну модель із χ^2-, t- та F-розподілами; опанувати поняття ступенів свободи як «кількості незалежних випадкових компонентів» у статистиці; закріпити вміння будувати довірчі інтервали для математичного сподівання та дисперсії і розуміти, чому саме ці розподіли стоять під капотом критеріїв Стьюдента, Фішера та інтервалів для σ^2.

Основні поняття: вибірка $X_1, \dots, X_n$; вибіркове середнє $\bar{X}$; вибіркова дисперсія S^2; ступені свободи ν; $\chi^2(\nu)$; $t(\nu)$; $F(\nu_1, \nu_2)$; центральні та нецентральні статистики; критичне значення (квантиль) $t_{\alpha,\nu}$, $\chi^2_{\alpha,\nu}$, $F_{\alpha;\nu_1,\nu_2}$; довірчий інтервал; рівень значущості α; двосторонній інтервал.

Теоретичні питання

1. Поясніть, що називають **вибірковою статистикою**. Наведіть приклади: $\bar{X}$, S^2, S.
2. Дайте означення **ступенів свободи** та поясніть, чому для дисперсії у нормальній моделі виникає $\nu = n - 1$, а не n.
3. Нехай $Z_1, \dots, Z_\nu$ — незалежні $N(0, 1)$. Запишіть означення:

$$Y = \sum_{i=1}^{\nu} Z_i^2 \sim \chi^2(\nu),$$

   та поясніть, що «квадрати нормальних» дають χ^2.
4. Запишіть математичне сподівання і дисперсію $\chi^2(\nu)$:

$$M(Y) = \nu, \qquad D(Y) = 2\nu,$$

   та поясніть, як вони змінюються зі зростанням ν.
5. Сформулюйте стандартний результат для нормальної вибірки $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$: які статистики мають нормальний/хі-квадрат розподіл (якісно: $\bar{X}$ і S^2), і чому це фундаментально для інтервалів.
6. Запишіть класичну t-статистику для оцінки μ при невідомій σ:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}.$$

   Поясніть, за яких умов $T \sim t(n - 1)$.
7. Дайте означення t-розподілу через незалежні $Z \sim N(0, 1)$ та $Y \sim \chi^2(\nu)$:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}} \sim t(\nu),$$

   і поясніть, що саме «додає хвости» порівняно з нормальним законом.
8. Запишіть умови існування математичного сподівання та дисперсії $t(\nu)$:

$$M(T) = 0 \ (\nu > 1), \qquad D(T) = \frac{\nu}{\nu - 2} \ (\nu > 2),$$

   і поясніть, чому при малих ν дисперсія «розходиться».

9. Поясніть граничний перехід $t(\nu) \Rightarrow N(0,1)$ при $\nu \to \infty$ (якісно: «невідомість дисперсії стає несуттєвою»).
10. Дайте означення F-розподілу через незалежні $Y_1 \sim \chi^2(\nu_1)$, $Y_2 \sim \chi^2(\nu_2)$:

$$F = \frac{Y_1/\nu_1}{Y_2/\nu_2} \sim F(\nu_1, \nu_2),$$

та поясніть його роль у порівнянні дисперсій.
11. Запишіть, як у нормальній моделі пов'язана статистика відношення дисперсій з F-розподілом (якісно: $\frac{S_1^2}{S_2^2}$ після масштабування).
12. Поясніть, що таке **критичне значення** (квантиль) для t, χ^2, F і як воно використовується в правилах прийняття рішень.
13. Запишіть загальний вигляд двостороннього довірчого інтервалу для μ при невідомій σ (через t-квантиль):

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2,\, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Поясніть інтерпретацію параметрів α, $n-1$, S.
14. Запишіть форму довірчого інтервалу для дисперсії σ^2 у нормальній моделі (через χ^2-квантилі):

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,\, n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,\, n-1}}.$$

15. Поясніть, чому в інтервалі для σ^2 квантилі стоять «у знаменнику» і чому вони асиметричні відносно центру.

Питання для самоконтролю

1. Чому для χ^2-розподілу параметр називають «ступенями свободи»?
2. Чому t-розподіл має важчі хвости, ніж $N(0,1)$?
3. За яких умов можна замінювати t-критерій на нормальний (якісно: великі n)?
4. Чому F-розподіл виникає при відношенні двох оцінок дисперсії?
5. Які типові задачі в медицині/біології приводять до використання t-, χ^2-, F-розподілів (оцінка середнього, оцінка дисперсії, порівняння дисперсій/варіабельності)?
6. Що означає «двосторонній» довірчий інтервал і чому в ньому фігурує $\alpha/2$?
7. Чому інтервал для μ симетричний відносно $\bar{X}$, а для σ^2 — ні?
8. Що станеться зі шириною довірчого інтервалу для μ, якщо збільшити n (якісно)?
9. Як зміниться $t_{\alpha/2,\nu}$ при зростанні ν (якісно)?
10. Який розподіл застосовують для статистики узгодженості (goodness-of-fit) і чому саме його?

Задачі для самостійного розв'язання

1. **(Характеристики розподілів)** Нехай випадкова величина $Y \sim \chi^2(\nu)$, де $\nu = 10$. Знайдіть $M(Y)$ та $D(Y)$.
2. **(t-розподіл)** Нехай $T \sim t(\nu)$, де $\nu = 10$. Знайдіть $M(T)$ та $D(T)$ (якщо вони існують).
3. **(Ступені свободи)** Для вибірки обсягу $n = 15$:
   (а) скільки ступенів свободи має статистика, пов'язана з оцінкою дисперсії S^2 у нормальній моделі?
   (б) який параметр ν використовують у t-розподілі для інтервалу середнього?

4. **(Довірчий інтервал для середнього, символічно)** Нехай $X_1, \dots, X_n$ — нормальна вибірка з невідомими μ, σ^2. Запишіть формулу двостороннього довірчого інтервалу для μ рівня надійності $1-\alpha$ через $\bar{X}$, S, n та t-квантиль.
5. **(Довірчий інтервал для дисперсії, символічно)** За тих самих умов запишіть формулу двостороннього довірчого інтервалу для σ^2 рівня $1-\alpha$ через S^2, n та χ^2-квантилі.
6. **(F-розподіл: постановка)** Нехай дві незалежні нормальні вибірки мають обсяги n_1 і n_2 та вибіркові дисперсії S_1^2, S_2^2.
   (а) Запишіть статистику, яка у нульовій гіпотезі $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ має F-розподіл.
   (б) Вкажіть ступені свободи (ν_1, ν_2) для цього F-розподілу.

Контрольні запитання

1. Що таке ступені свободи і чому вони з'являються у статистичних розподілах вибіркових характеристик?
2. Для чого використовується t-розподіл і яка статистика має цей розподіл у нормальній моделі?
3. Для чого використовується χ^2-розподіл у задачах про дисперсію та критерії узгодженості?
4. Коли застосовується F-розподіл і яка статистика приводить до нього?
5. Який зв'язок між нормальним розподілом, χ^2, t і F (якісно: всі три будуються з нормальних компонентів)?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 10

Тема: Варіаційні ряди. Полігони та гістограми. Емпірична функція розподілу та огіва. Емпірична щільність.

Мета: Навчитися виконувати первинну статистичну обробку вибіркових даних через впорядкування, групування та графічну репрезентацію; будувати дискретні й інтервальні варіаційні ряди, полігони частот/відносних частот, гістограми, емпіричну функцію розподілу та огіву; інтерпретувати ці об'єкти як емпіричні наближення теоретичних розподілів.

Основні поняття: вибірка, варіаційний ряд; частота m_i, відносна частота $p_i = m_i/n$; накопичені частоти; інтервали (класи) $[a_i, a_{i+1})$; ширина класу h; гістограма; полігон; емпірична функція розподілу $F^*(x)$; огіва; емпірична функція щільності (гістограма щільності).

Теоретичні питання

1. Дайте означення **варіаційного ряду**. Чим відрізняється «просто впорядкована вибірка» від **дискретного варіаційного ряду** (значення + частоти)?
2. Нехай значення вибірки після групування: $x_1 < \cdots < x_k$ з частотами $m_1, \ldots, m_k$. Запишіть умови:
$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i, \qquad p_i = \frac{m_i}{n}, \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$
3. Поясніть, що таке **полігон частот** і **полігон відносних частот**. Які точки з'єднують ламаною?
4. Дайте означення **інтервального варіаційного ряду**. Як обирають:
$$R = x_{\max} - x_{\min}, \qquad k, \qquad h \approx \frac{R}{k}?$$
5. Запишіть формулу Стерджеса для кількості класів:
$$k \approx 1 + 3.322\ \lg(n),$$
та поясніть, яку роль відіграє округлення (в більший/менший бік).
6. Нехай інтервали $[a_i, a_{i+1})$ і частоти m_i. Як будують **гістограму частот** та **гістограму відносних частот**?
7. Поясніть різницю між «висотою стовпчика = частота» та «висотою стовпчика = щільність». Запишіть **щільність-частоту** для класу:
$$\hat{f}_i = \frac{m_i}{n\,h}.$$
8. Запишіть **емпіричну функцію розподілу**:
$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$
де $n_x = \#\{j : X_j < x\}$. Поясніть, чому $F^*(x)$ є неспадною та чому вона має східчастий вигляд.
9. Сформулюйте властивості $F^*(x)$, аналогічні до теоретичної $F(x)$:
$$0 \le F^*(x) \le 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} F^*(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F^*(x) = 1.$$
10. Дайте означення **огіви**. Які саме точки відкладають на площині для побудови кумулятивної кривої?
11. Поясніть, як з огіви можна оцінити медіану та квартилі (як **емпіричні квантили**).
12. Чим відрізняються полігон/гістограма як «форма розподілу» від огіви як «накопичення»?

Питання для самоконтролю

1. Які об'єкти будують для дискретних даних, а які — для неперервних?
2. Чому надто мале k робить гістограму грубою, а надто велике — шумною?
3. Що таке «накопичена відносна частота» і чому її останнє значення дорівнює 1?
4. Чим відрізняється емпірична функція розподілу від теоретичної?
5. Навіщо вводять гістограму щільності $\hat{f}_i = \frac{m_i}{nh}$, а не обмежуються m_i?

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1 (дискретний варіаційний ряд, полігон, огіва)

Дано згруповані дані про кількість квіток на пагоні:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
m_i	0	1	3	6	4	3	2	1

1. Обчисліть обсяг вибірки $n = \sum m_i$.
2. Обчисліть відносні частоти $p_i = m_i/n$.
3. Обчисліть накопичені відносні частоти

$$F^*(x_i) = \sum_{x_j < x_i} p_j \quad \text{або} \quad F^*(x_{i+1}) = \sum_{j \le i} p_j,$$

   залежно від прийнятої конвенції (узгодьте її в записах і не змінюйте в середині розв'язку).
4. Побудуйте полігон відносних частот (точки (x_i, p_i)).
5. Побудуйте огіву (точки (x_i, накопичена частота)).

Задача 2 (емпірична функція розподілу з дискретного ряду)

Для даного в задачі 1 дискретного ряду:
1. Запишіть $F^*(x)$ як східчасту функцію (за означенням $F^*(x) = \#\{X_j < x\}/n$).
2. Знайдіть значення $F^*(4)$, $F^*(5)$, $F^*(9)$.
3. За $F^*(x)$ визначте емпіричну медіану Me^* як найменше x, для якого $F^*(x) \ge 0.5$ (або іншу чітко вказану конвенцію).

Задача 3 (інтервальний варіаційний ряд і гістограма: алгоритм)

Нехай задано вибірку неперервних даних $X_1, \dots, X_n$ (дані конкретно не наводяться).
1. Запишіть алгоритм побудови інтервального варіаційного ряду:

$$x_{\min},\, x_{\max},\, R = x_{\max} - x_{\min},\, k,\, h \approx R/k,\, [a_1, a_2), \dots, [a_k, a_{k+1}),$$

   підрахунок m_i.
2. Запишіть формули для висот стовпчиків:
   (а) гістограма частот: m_i,
   (б) гістограма відносних частот: $\frac{m_i}{n}$,
   (в) гістограма щільності: $\hat{f}_i = \frac{m_i}{nh}$.
3. Поясніть (коротко, але математично), чому при використанні $\hat{f}_i$ виконується нормування за площею:

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{f}_i\, h = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{nh}\, h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i = 1.$$

Контрольні запитання

1. Чим відрізняється гістограма від полігону і коли застосовують кожну з них?
2. Що показує огіва (кумулятивна крива) і як її інтерпретувати?
3. Як обрати кількість інтервалів k для гістограми та яку роль відіграє формула Стерджеса?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 11

Тема: Оцінювання параметрів розподілу. Точкові та інтервальні оцінки. Довірчі інтервали для μ і σ^2 (нормальна модель).

Мета: Навчитися будувати точкові оцінки параметрів генеральної сукупності за вибіркою та конструювати довірчі інтервали для математичного сподівання і дисперсії; розуміти роль репрезентативності, обсягу вибірки, рівня значущості α та ступенів свободи.

Основні поняття: генеральна сукупність, вибірка, репрезентативність; параметр μ, σ^2; точкова оцінка; незміщеність; вибіркове середнє $\bar{x}$; вибіркова дисперсія s^2; довірчий інтервал; надійна ймовірність $1-\alpha$; квантиль; t-розподіл; χ^2-розподіл; ступені свободи ν.

Теоретичні питання

1. Дайте означення **генеральної сукупності** та **вибірки**. Що означає вимога **репрезентативності** вибірки і чому вона критична для коректності висновків?
2. Поясніть різницю між **точковим** та **інтервальним** оцінюванням параметра. Наведіть по одному прикладу для оцінювання μ і σ^2.
3. Запишіть формули точкових оцінок:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

   Поясніть, чому у визначенні s^2 стоїть $n-1$ (ступені свободи).
4. Дайте означення **довірчого інтервалу** та **надійної ймовірності** $1-\alpha$. Поясніть зміст параметра α.
5. За яких умов (модельних припущень) застосовують довірчий інтервал для μ на основі t-розподілу? Поясніть, як змінюється ширина інтервалу при зміні n, s, α.
6. Поясніть, чому інтервал для σ^2 є асиметричним (на відміну від інтервалу для μ).
7. Дайте означення **квантиля** $t_{\alpha/2,n-1}$ та $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ як значень, що відтинають задану частку площі під кривою відповідного розподілу.
8. Поясніть, що таке **ступені свободи** $\nu = n-1$ у задачах оцінювання дисперсії.

Питання для самоконтролю

1. Які оцінки називають незміщеними? Яка з двох оцінок дисперсії є незміщеною: $\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$ чи $\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2$?
2. Від чого залежить довжина довірчого інтервалу для μ?
3. Чому для малих n використовують t-розподіл, а не нормальний?
4. Чому для оцінювання σ^2 з'являється χ^2-розподіл?
5. Що буде з довірчим інтервалом для μ, якщо збільшити надійність з 0.95 до 0.99 (тобто зменшити α)?

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1 (повторити приклад: інтервали для μ та σ^2)

Тривалість захворювання (у днях) у 20 випадках пневмонії:

10, 11, 6, 16, 7, 13, 15, 8, 9, 10, 11, 13, 7, 8, 13, 15, 16, 13, 14, 15.

Побудувати 95% довірчі інтервали для μ та σ^2 за припущення нормальності.

1. Знайдіть n, $\bar{x}$, s^2, s.
2. Вкажіть α і $\nu = n - 1$.
3. Запишіть довірчий інтервал для μ через $t_{\alpha/2,\nu}$.
4. Запишіть довірчий інтервал для σ^2 через $\chi^2_{\alpha/2,\nu}$ та $\chi^2_{1-\alpha/2,\nu}$.
5. Дайте коротку інтерпретацію отриманих інтервалів у термінах «з надійністю 95%...».

Задача 2 (вплив обсягу вибірки на інтервал для μ)

Нехай відомо $\bar{x}$ і s для двох вибірок одного процесу, але одна вибірка має обсяг n_1, інша — n_2, причому $n_2 > n_1$.

1. Поясніть (через формулу), чому довірчий інтервал для μ при більшому n зазвичай вужчий.
2. Вкажіть два механізми, через які n впливає на ширину інтервалу: через множник $\frac{1}{\sqrt{n}}$ та через квантиль $t_{\alpha/2,n-1}$.

Задача 3 (довірчий інтервал для μ при відомій дисперсії)

Припустимо, що дисперсія відома і дорівнює σ^2 (нормальна модель).

1. Запишіть довірчий інтервал для μ через квантиль нормального розподілу $z_{\alpha/2}$:

$$\mu \in \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

2. Поясніть, у чому структурна різниця з t-інтервалом при невідомій дисперсії.

Контрольні запитання

1. Що таке точкова та інтервальна оцінки? Наведіть приклади.
2. Від чого залежить ширина довірчого інтервалу для середнього значення?
3. Як побудувати довірчий інтервал для середнього значення, якщо дисперсія невідома?
4. Який розподіл використовується для побудови інтервалу для σ^2 і чому?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.

3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 12

Тема: Перевірка статистичних гіпотез. Нульова та альтернативна гіпотези. Критична область. Помилки I та II роду. Рівень значущості, потужність критерію.

Мета: Навчитися формулювати статистичні гіпотези, обирати критерій перевірки, будувати критичну область для заданого рівня значущості α, обчислювати значення статистики за вибіркою та приймати рішення щодо H_0 з інтерпретацією помилок I та II роду.

Основні поняття: статистична гіпотеза; H_0, H_1; статистика критерію; критична область; p-value; помилки першого роду (α) та другого роду (β); потужність $(1-\beta)$; односторонні та двосторонні критерії; t-критерій Стьюдента; критерій Діксона (перевірка промахів).

Теоретичні питання

1. Дайте означення **статистичної гіпотези**. Наведіть приклади гіпотез у медико-біологічному контексті (про середнє, дисперсію, частку, різницю середніх).
2. Поясніть сенс **нульової** та **альтернативної** гіпотез:

$$H_0: \text{ параметр має «нормальне» значення або ефект відсутній,} \qquad H_1: \text{ ефект є (знак/напрям}$$

3. Поясніть, що таке **статистика критерію** і як вона будується: перехід від даних до одного числа $T = T(X_1, \ldots, X_n)$.
4. Дайте означення **критичної області** K та **області прийняття** A для H_0:

$$K \cup A = \mathbb{R}, \qquad K \cap A = \varnothing.$$

Як пов'язане правило рішення з порівнянням T та критичного значення?
5. Сформулюйте **помилку I роду** та **помилку II роду**. Запишіть:

$$\alpha = P(\text{відхилити } H_0 \mid H_0 \text{ істинна}), \qquad \beta = P(\text{не відхилити } H_0 \mid H_1 \text{ істинна}).$$

6. Дайте означення **потужності критерію** $1-\beta$ та поясніть, від чого вона залежить (обсяг вибірки n, розкид s, відхилення параметра від норми, вибір α).
7. Поясніть різницю між **одностороннім** та **двостороннім** критеріями. Для гіпотези про середнє запишіть три типові постановки:

$$H_1: \mu \neq \mu_0, \qquad H_1: \mu < \mu_0, \qquad H_1: \mu > \mu_0.$$

8. Запишіть t-статистику для перевірки **однієї** середньої при невідомій дисперсії (нормальна модель):

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}, \qquad \nu = n - 1.$$

Поясніть, за яких умов вона має t-розподіл.
9. Запишіть t-статистику для перевірки рівності середніх **двох незалежних вибірок** за умови рівності дисперсій:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}}, \qquad s_p^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}, \quad \nu = n_x + n_y - 2.$$

10. Поясніть поняття **p-value** як імовірності отримати значення статистики не менш екстремальне, ніж спостережене, за умови істинності H_0.

Питання для самоконтролю

1. Чому неможливо одночасно зробити і α, і β «дуже малими» при фіксованому n?
2. Що зміниться у правилі рішення, якщо перейти від двосторонньої альтернативи до односторонньої?
3. Який вплив має збільшення n на потужність?
4. Чим відрізняється формулювання «H_0 приймається» від «H_0 не відхиляється»?

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1 (перевірка промаху: критерій Діксона)

Одержані дані про вміст вітаміну C в томатах (мг/100г):

$$26, 22, 21, 19, 20, 23, 13, 27, 22, 23, 22.$$

На рівні значущості $\alpha = 0.01$ перевірити, чи є значення 13 промахом (викидом), використовуючи критерій Діксона.

1. Сформулюйте H_0 та H_1.
2. Побудуйте варіаційний ряд і позначте x_1, x_2, x_{n-1}, x_n.
3. Обчисліть статистику Діксона для найменшого значення:
$$Q = \frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}.$$
4. За таблицею критичних значень знайдіть $Q_{\text{crit}}(n = 11, \alpha = 0.01)$.
5. Зробіть висновок, порівнявши Q_{calc} і Q_{crit}.

Задача 2 (t-критерій для одного середнього: одностороння перевірка)

На фармацевтичній фабриці перевіряють систематичне **зниження** проти норми концентрації компонента. Норма $\mu_0 = 100\%$. За $n = 10$ проб отримано $\bar{x} = 98\%$ та вибіркове стандартне відхилення $s = 0.5\%$. Перевірити гіпотезу на рівні значущості $\alpha = 0.05$.

1. Сформулюйте гіпотези:
$$H_0 : \mu = 100\%, \qquad H_1 : \mu < 100\%.$$
2. Обчисліть t-статистику:
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$
3. Вкажіть ступені свободи $\nu = n - 1 = 9$.
4. Знайдіть критичне значення для **лівосторонньої** критичної області:
$$t_{\text{crit}} = -t_{0.05,9}.$$
5. Прийміть рішення, порівнявши t з t_{crit}, і сформулюйте висновок «є/немає статистично значущого зниження».

Задача 3 (узагальнення: двосторонній тест для μ)

Нехай для деякого показника вважається нормою μ_0. За вибіркою обсягу n отримано $\bar{x}$ та s.

1. Запишіть $H_0 : \mu = \mu_0$ та $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
2. Запишіть статистику $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ та правило рішення для двостороннього тесту:
$$|t| > t_{\alpha/2,n-1} \;\Rightarrow\; H_0 \text{ відхиляється.}$$
3. Поясніть, чому в двосторонньому тесті використовується $\alpha/2$.

Контрольні запитання

1. Що таке нульова та альтернативна гіпотези?
2. Чим відрізняються помилки першого та другого роду?
3. Що таке рівень значущості та потужність критерію?
4. Що таке критична область?
5. У чому різниця між одностороннім і двостороннім тестом?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 13

Тема: Кореляційний аналіз. Коваріація та коефіцієнт кореляції Пірсона.

Мета: навчити здобувачів вимірювати та аналізувати статистичний зв'язок між двома випадковими величинами за допомогою коваріації та коефіцієнта кореляції Пірсона, робити простий висновок про напрям і силу лінійного зв'язку.

Основні поняття: кореляційна залежність, кореляційний аналіз, коваріація, коефіцієнт кореляції Пірсона.

Теоретичні питання

1. Дайте означення **кореляційної залежності**.
2. Запишіть означення **коваріації**:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

3. Запишіть формулу **вибіркової коваріації**:

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

4. Запишіть означення **коефіцієнта кореляції Пірсона**:

$$\rho_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

5. Запишіть формулу **вибіркової оцінки коефіцієнта кореляції**:

$$r_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}.$$

Завдання для самостійної підготовки

Приклад розв'язання задачі

Задача. При обстеженні 11 пацієнтів одержані дані про зріст H (см) та об'єм циркулюючої крові V (л). Визначити вибіркову оцінку коефіцієнта кореляції.

H	170	169	175	150	175	155	180	160	185	175	165
V	4.8	5.1	4.0	5.3	4.1	5.3	4.8	4.3	5.2	5.2	4.7

Розв'язок.

1. Обчислюємо вибіркові середні: $\bar{H} \approx 169.0$ см, $\bar{V} = 4.8$ л.
2. Обчислюємо стандартні відхилення: $s_H \approx 10.7$ см, $s_V \approx 0.48$ л.
3. Обчислюємо вибіркову коваріацію:

$$s_{HV} = \frac{1}{10}\sum(H_i - 169)(V_i - 4.8) \approx -3.34.$$

4. Обчислюємо коефіцієнт кореляції:

$$r_{HV} = \frac{s_{HV}}{s_H s_V} = \frac{-3.34}{10.7 \cdot 0.48} \approx -0.65.$$

Висновок: існує помірний обернений лінійний зв'язок між зростом та об'ємом циркулюючої крові у даній вибірці.

Задачі для самоконтролю

1. Запишіть формулу коваріації та поясніть, що вона показує.
2. Запишіть формулу коефіцієнта кореляції Пірсона та вкажіть, у яких межах він змінюється.
3. Що означає знак коефіцієнта кореляції ($r > 0$ та $r < 0$)?

Контрольні запитання

1. Що таке кореляційна залежність?
2. Які властивості має коефіцієнт кореляції Пірсона?
3. Що означає, якщо коефіцієнт кореляції дорівнює 0? А якщо дорівнює -1?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.

Самостійна робота № 14

Тема: Регресійний та дисперсійний аналіз (ANOVA).

Мета: навчити здобувачів застосовувати просту лінійну регресію для опису залежності результативної ознаки Y від факторної ознаки X, а також використовувати дисперсійний аналіз (ANOVA) для перевірки гіпотез про вплив фактора на середнє значення досліджуваної величини.

Основні поняття: регресійний аналіз, рівняння регресії, коефіцієнт регресії, метод найменших квадратів, дисперсійний аналіз (ANOVA), факторні ознаки, модель дисперсійного аналізу, міжгрупова та внутрішньогрупова мінливість.

Теоретичні питання

1. Що вивчає **регресійний аналіз**? Які величини називають результативною (Y) та факторною (X)?
2. Запишіть **модель простої лінійної регресії**:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$

   Поясніть зміст коефіцієнтів β_0, β_1 та похибки ε_i.
3. Що таке **метод найменших квадратів**? Яку величину мінімізують при МНК?
4. Запишіть **рівняння вибіркової регресії** та формули оцінок:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x, \qquad b_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}, \qquad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}.$$

5. Що таке **дисперсійний аналіз (ANOVA)** і яку гіпотезу він перевіряє?
6. Поясніть зміст **загальної**, **міжгрупової** та **внутрішньогрупової** мінливості:

$$SS_{\text{total}} = SS_A + SS_W.$$

7. Запишіть формули середніх квадратів та F-критерію:

$$MS_A = \frac{SS_A}{I-1}, \qquad MS_W = \frac{SS_W}{n-I}, \qquad F = \frac{MS_A}{MS_W}.$$

Завдання для самостійної підготовки

Приклад 1. Регресійний аналіз (за зразком)

Умова. У дослідженні оцінюють зв'язок між індексом маси тіла X (кг/м^2) та систолічним артеріальним тиском Y (мм рт. ст.). Дані для 6 пацієнтів:

$$(20; 110),\ (22; 115),\ (25; 120),\ (27; 128),\ (30; 135),\ (32; 140).$$

Побудувати рівняння простої лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x$ методом найменших квадратів та зробити висновок щодо наявності лінійної залежності ($\alpha = 0.05$).

Розв'язання (коротко за етапами).

1. Обчислюємо середні значення:

$$\bar{x} = 26, \qquad \bar{y} = \frac{374}{3} \approx 124.67.$$

2. Обчислюємо суми:

$$S_{xy} = \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 268, \qquad S_{xx} = \sum(x_i - \bar{x})^2 = 106.$$

3. Знаходимо коефіцієнти регресії:

$$b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{268}{106} = \frac{134}{53} \approx 2.53, \qquad b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} \approx 58.93.$$

4. Рівняння регресії:

$$\boxed{\hat{y} = 58.93 + 2.53x}.$$

5. Перевірка значущості нахилу ($\alpha = 0.05$): гіпотези $H_0 : \beta_1 = 0$, $H_1 : \beta_1 \neq 0$. За зразком отримують дуже велике значення t (порівняно з критичним t_{crit} для $\nu = n - 2 = 4$), тому H_0 відхиляється.

Висновок: у наведених даних спостерігається статистично значущий лінійний зв'язок між X та Y (при $\alpha = 0.05$).

Приклад 2. Дисперсійний аналіз (ANOVA) (за зразком)

Умова. В результаті вимірювання частоти пульсу людини у нормальних умовах та при підвищених прискореннях одержані дані:
- Група 1 (Норма, 1g): 76, 73, 68, 83
- Група 2 (1.5g): 71, 62, 55, 68
- Група 3 (2g): 46, 59, 54

Чи свідчать ці дані про наявність залежності між частотою пульсу та прискоренням ($\alpha = 0.05$)?

Розв'язання (коротко за етапами).

1. **Гіпотези:** $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$; H_1: не всі середні рівні.
2. **Середні:** $I = 3$, $n_1 = 4$, $n_2 = 4$, $n_3 = 3$, $n = 11$.

$$\bar{y}_1 = 75, \qquad \bar{y}_2 = 64, \qquad \bar{y}_3 = 53, \qquad \bar{y} = 65.$$

3. **Суми квадратів:**

$$SS_A = 836, \qquad SS_W = 354, \qquad SS_{\text{total}} = SS_A + SS_W.$$

4. **Ступені свободи:** $\nu_1 = I - 1 = 2$, $\nu_2 = n - I = 8$.
5. **Середні квадрати:**

$$MS_A = \frac{836}{2} = 418, \qquad MS_W = \frac{354}{8} = 44.25.$$

6. **F-критерій:**

$$F = \frac{418}{44.25} \approx 9.45.$$

7. **Рішення:** за таблицею $F_{\text{crit}}(2, 8; \alpha = 0.05) = 4.46$. Оскільки $9.45 > 4.46$, H_0 відхиляємо.

Висновок: дані свідчать про статистично значущий вплив прискорення на середню частоту пульсу (при $\alpha = 0.05$).

Задачі для самоконтролю

1. Запишіть модель простої лінійної регресії та поясніть, що означають β_0 і β_1.
2. За якими формулами обчислюються b_0 і b_1 у методі найменших квадратів?
3. Що перевіряє ANOVA (сформулюйте H_0 для I груп)?
4. Як інтерпретувати ситуацію, коли SS_A велика, а SS_W мала?
5. Запишіть формулу для F-критерію та вкажіть ступені свободи ν_1 і ν_2.

Контрольні запитання

1. Що таке рівняння регресії і для чого воно використовується?
2. У чому полягає метод найменших квадратів?
3. Яку гіпотезу перевіряє дисперсійний аналіз?
4. Що таке міжгрупова та внутрішньогрупова мінливість в ANOVA?

Перелік навчально-методичної літератури

Основна

1. Грузєва Т. С., Лехан В. М., Огнєв В. А. та ін. *Біостатистика: підручник.* — Вінниця: Нова Книга, 2020. — 384 с.
2. Сергєєва Л. Н., Прокопченко О. Є. *Вища математика і статистика. Частина I: Математичний аналіз: навчальний посібник (для фармацевтичних факультетів).* — Запоріжжя, 2019. — 118 с.
3. Болух В. А., Євдокимова О. Ю. *Вища математика і статистика: практикум.* — Житомир: Вид-во «Рута», 2022.
4. Шарай Н. В., Білозерова М. О. *Вища математика в прикладах і задачах. Теорія ймовірності: навч.-метод. посібник.* — Одеса: ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2023. — 122 с.

Додаткова

1. Личковський Е. І., Свердан П. Л., Тіманюк В. О., Чалий О. В. *Вища математика.* — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 632 с.
2. Свердан П. Л. *Біометрія. Теорія наукових досліджень: підручник.* — Київ: Знання, 2010. — 440 с.
3. *Фізичні методи аналізу та метрологія: підруч. для студ. вищ. мед. та фарм. навч. закл. IV р. акр. (протокол МОНУ №4 від 14.11.2013 р.)* / Е. І. Личковський, В. О. Тіманюк, О. В. Чалий та ін.; за ред. Е. І. Личковського. — Вінниця: Нова Книга, 2014. — 464 с.